4 Systèmes d'équations

Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, par exemple

$$\begin{cases} 3\,x = \ 4\,y + 5 \\ 2\,x + 10\,y = -22 \end{cases}$$

c'est chercher l'ensemble des couples $(x; y)$ qui satisfont simultanément les deux équations.

On résout un système en le remplaçant par un autre système équivalent (qui possède le même ensemble de solution) mais dont la solution est plus facile à déterminer.

Deux systèmes sont équivalents si

1° chaque équation de l'un est équivalente à une équation de l'autre, par exemple :

$$\begin{cases} 3\,x = \ 4\,y + 5 \\ 2\,x + 10\,y = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x - 4\,y = 5 \\ x + 5\,y = -11 \end{cases}$$

Ici, dans la première équation E_1, on a soustrait $4\,y$ aux deux membres, alors que, dans la seconde E_2, on a divisé les deux membres par 2.

2° l'une des équations est remplacée par une combinaison linéaire des deux équations, par exemple :

$$\begin{cases} 3\,x - 4\,y = 5 \\ x + 5\,y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,x - \ 4\,y = 5 \\ 5\,x - 13\,y = 21 \end{cases}$$

Ici, la seconde équation E_2 est remplacée par la combinaison linéaire $2 \cdot E_1 - E_2$ (on vérifie en effet que $2\,(3\,x) - x = 5\,x$, $2\,(-4\,y) - 5\,y = -13\,y$ et $2 \cdot 5 - (-11) = 21$).

3° l'une des équations est utilisée pour substituer l'un de ses membres par l'autre dans l'autre équation, par exemple :

$$\begin{cases} 3\,x - \ 4\,y = 5 \\ x = -5\,y - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\,(-5\,y - 11) - \ 4\,y = 5 \\ x = -5\,y - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19\,y - \ 33 = 5 \\ x = -5\,y - 11 \end{cases}$$

Ici, on utilise la seconde équation E_2 pour substituer x par $-5\,y - 11$ dans E_1.

La méthode qui se généralise le mieux à des systèmes plus grand (plus d'équations ou plus d'inconnues) et celle qui consiste à *échelonner* le système afin d'obtenir un système ayant une équation à une inconnue et une équation à deux inconnues, comme :

$$\begin{cases} x + \ 5\,y = -11 \\ \ 19\,y = -38 \end{cases}.$$

Pour ce faire, il suffit de remplacer une des équation par une combinaison linéaire qui élimine l'une des inconnues, par exemple x :

$$\begin{cases} 3\,x - 4\,y = 5 \\ x + 5\,y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -19\,y = 38 \\ x + 5\,y = -11 \end{cases}$$

ici la première équation E_1 est remplacée par la combinaison linéaire $E_1 - 3 \cdot E_2$ (on vérifie en effet que $3\,x - 3\,x = 0$, $-4\,y - 3\,(5\,y) = -19\,y$ et $5 - 3\,(-11) = 38$).

On peut ensuite trouver l'autre inconnue, ici y, puis la substituer dans l'équation à deux inconnues pour enfin déterminer x :

$$\left\{\begin{array}{r} -19\,y=38 \\ x+5\,y=-11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y=-2 \\ x+5\,y=-11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y=-2 \\ x+5\,(-2)=-11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Finalement, on donne l'ensemble des solutions du système, c'est à dire l'ensemble des couples $(x;y)$ qui satisfont simultanément les deux équations :

$$\left\{\begin{array}{r} 3\,x-4\,y=5 \\ x+5\,y=-11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=-2 \\ x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x;y)\in\{(-1;-2)\}$$

Pour aller plus loin

Résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues, par exemple

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ 2\,x & - & y & + & 5\,z & = & 3 \\ 4\,x & + & 7\,y & + & 5\,z & = & -7 \end{array}\right.$$

c'est chercher l'ensemble des triplets $(x;y;z)$ qui satisfont simultanément les trois équations.

La méthode la plus efficace consiste à *échelonner* le système afin d'obtenir un système ayant une équation à une inconnue, une équation à deux inconnues et une équation à trois inconnues. Pour ce faire, on commence par remplacer E_2 par une combinaison linéaire de E_1 et E_2 qui ne contient aucun x, ici $2\cdot E_1-E_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ 2\,x & - & y & + & 5\,z & = & 3 \\ 4\,x & + & 7\,y & + & 5\,z & = & -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ 4\,x & + & 7\,y & + & 5\,z & = & -7 \end{array}\right.$$

Puis, on remplace E_3 par une combinaison linéaire de E_1 et E_3 qui ne contient aucun x, ici $4\cdot E_1-E_3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ 4\,x & + & 7\,y & + & 5\,z & = & -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ & & 5\,y & + & 3\,z & = & -13 \end{array}\right.$$

Ensuite, on remplace E_3 par une combinaison linéaire de E_2 et E_3 qui ne contient aucun y, ici $-5\cdot E_2+7\cdot E_3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ & & 5\,y & + & 3\,z & = & -13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ & & & & 26\,z & = & -26 \end{array}\right.$$

On peut alors, grâce à E_3, trouver l'inconnue z, puis la substituer dans E_2 pour trouver y :

$$\left\{\begin{array}{r} x+3\,y+2\,z=-5 \\ 7\,y-z=-13 \\ z=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3\,y+2\,z=-5 \\ 7\,y-(-1)=-13 \\ z=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3\,y+2\,z=-5 \\ 7\,y=-14 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

Et finalement, substituer y et z dans E_1 pour trouver x :

$$\left\{\begin{array}{r} x+3\,y+2\,z=-5 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3\,(-2)+2\,(-1)=-5 \\ y=-2 \\ z=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 3 \\ y & = & -2 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercices

Exercice 4.1

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} 3\,x + y = -13 \\ -11\,x - 8\,y = -13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = -20 \\ -3\,x - y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5\,x + 2\,y = -102 \\ 6\,x - y = -68 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -5\,x - y = 20 \\ -5\,x + 3\,y = 60 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -10\,x + 11\,y = 135 \\ -5\,x + 10\,y = -180 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2\,x + y = 10 \\ -3\,x + y = -25 \end{cases}$

Exercice 4.2

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} -2\,x + 2\,y = 4 \\ -9\,x - y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 4\,y = -2 \\ x - 6\,y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + 5\,y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 8\,y = -1 \\ -x + 3\,y = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -5\,x - 2\,y = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 6\,x + y = -11 \end{cases}$

Exercice 4.3

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} -\frac{3}{4}\,x - \frac{2}{7}\,y = 5 \\ -3\,x - \frac{1}{2}\,y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3}{2}\,x - \frac{2}{3}\,y = 1 \\ -\frac{7}{3}\,x + y = \frac{7}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = \frac{7}{5} \\ -3\,x - 5\,y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{3}\,x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - \frac{2}{3}\,y = 5 \\ x - y = \frac{1}{5} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{3}{4}\,x - \frac{2}{3}\,y = -2 \\ 2\,x + 5\,y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 4.4

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} -x - y = 1 \\ x + y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3\,x + 7\,y = 1 \\ -6\,x + 14\,y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 5\,x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -4\,x - y = 6 \\ 4\,x + y = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3\,x - y = 1 \\ -15\,x + 5\,y = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5\,x - 4\,y = -2 \\ 45\,x - 5\,y = -18 \end{cases}$

Exercice 4.5

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ -10x + 5y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x - y = -20 \\ 2x - 2y = -16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x - y = -10 \\ -x + 3y = -10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = -7 \\ 5x + 5y = -35 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + y = -8 \\ x + y = -2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -12x - 4y = 32 \\ 2x - 2y = -160 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -x - 7y = 1 \\ x + 7y = -1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -2x - \frac{3}{2}y = \frac{11}{6} \\ -x - \frac{1}{6}y = -\frac{11}{6} \end{cases}$

i) $\begin{cases} -x + 8y = 68 \\ -3x + 7y = -85 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x - y = \frac{32}{5} \\ x - \frac{21}{5}y = -\frac{16}{5} \end{cases}$

k) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + y = \frac{4}{5} \\ -x - 3y = -1 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x + 3y = \frac{20}{3} \\ -5x + 5y = -60 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x + 4y = 99 \\ x + 5y = -22 \end{cases}$

n) $\begin{cases} -5x - 4y = 1 \\ 10x + 8y = -1 \end{cases}$

o) $\begin{cases} -x - y = -42 \\ -x + 5y = 66 \end{cases}$

p) $\begin{cases} -5x - 3y = 1 \\ \frac{9}{4}x + \frac{27}{20}y = -\frac{2}{5} \end{cases}$

q) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}y = \frac{1}{14} \\ x - \frac{1}{4}y = -\frac{1}{56} \end{cases}$

r) $\begin{cases} x + y = -5 \\ -4x + y = 25 \end{cases}$

Exercice 4.6

Une mule se plaignant d'être trop chargée dit à une ânesse « Si je te donnais un de mes sacs, nous en aurions autant l'une que l'autre ; et si tu m'en donnais un des tiens, j'en aurais le double de toi. » Combien de sacs les deux équidés transportent-ils ?

Exercice 4.7

Deux amis se partagent 43 billes de verre. Ils rencontrent ensuite un tiers à qui chacun offre 8 billes. L'un des amis possède alors le double de billes de l'autre. Combien chacun des amis avait-il reçu de billes lors du partage ?

Exercice 4.8

On range des pommes dans des caisses, en en mettant 525 par caisse. Si l'on avait mis 600 pommes par caisse, il aurait fallu une caisse de moins. Combien y a-t-il de pommes ?

Exercice 4.9

Le périmètre d'un terrain rectangulaire est égal à 450 m. La largeur est égale aux $\frac{3}{7}$ de sa longueur. Trouver les dimensions et l'aire de ce terrain en are.

Exercice 4.10

Amandine achète 2 croissants et 4 pains au chocolat pour 8 francs et 80 centimes. Sarah achète 7 croissants et 8 pains au chocolat pour 21 francs et 20 centimes. Quel est le prix d'un croissant et d'un pain au chocolat ?

Exercice 4.11

Une somme de 285 € est payée à l'aide de 37 billets de 10 € et 5 €. Combien y a-t-il de billets de chaque sorte ?

Exercice 4.12

Le périmètre d'un rectangle est de 144 mètres. La longueur du rectangle mesure 34 mètres de plus que sa largeur. Déterminer les dimensions du rectangle.

Exercice 4.13

On sait que 5 feutres et 7 stylo coûtent 23,20 francs et que 2 feutres et 6 stylos coûtent 16 francs. Calculer le prix d'un feutre et le prix d'un stylo.

Exercice 4.14

Comment peut-on payer la somme de 96 francs avec 30 pièces, les unes de 5 francs et les autres de 2 francs ?

Exercice 4.15

Un gymnase a un effectif de 525 élèves inscrits. Le 28% des garçons et le 40% des filles, soit 171 élèves, pratiquent un sport dans un club. Calculer le nombre de garçons et de filles inscrits dans ce gymnase.

Exercice 4.16

Un professeur souhaite organiser une sortie de classe. Il envisage deux destinations : Paris et Barcelone. Il calcule ensuite le coût de chaque voyage pour la classe entière.

a) Aller à Barcelone reviendrait à 14 400 francs, sachant que les moins de 16 ans payeraient 400 francs et les plus de 16 ans, 500 francs.
b) Par contre, aller à Paris ne coûterait que 11 100 francs, sachant que les moins de 16 ans payeraient 300 francs et les plus de 16 ans, 400 francs.

Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Exercice 4.17

Un objet composé d'un alliage d'or et de cuivre pèse 2 451 grammes. Son volume est de $165\,\text{cm}^3$. On sait que $1\,\text{cm}^3$ d'or pèse 19,5 grammes et que $1\,\text{cm}^3$ de cuivre pèse 9 grammes. Calculer le volume d'or et le volume de cuivre de cet objet. (On suppose que les volumes s'additionnent.)

Exercice 4.18

Un marchand de scooter vient de vendre deux scooters d'occasion pour la somme totale de 2 100 francs. Il a réalisé 10% de bénéfice sur la vente du premier scooter mais il a perdu 10% sur l'autre. Globalement, il a réalisé un bénéfice de 5%. Combien de francs avait-il acheté chacun des scooters ?

Exercice 4.19

Un train met 7 secondes pour passer devant un voyageur immobile sur le quai, et 25 secondes pour traverser entièrement une gare de 378 m de long. Quelle est la longueur x du train (en mètres) ? Et sa vitesse y (en km/h) ?

Exercice 4.20

Déterminer géométriquement la solution des systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 3\,x + y = 4 \\ 2\,x - 4\,y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = -1 \\ 3\,x - y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5\,x + 2\,y = -5 \\ 6\,x - y = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -5\,x - y = 6 \\ 5\,x + 3\,y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10\,x + 5\,y = 0 \\ 3\,x + 4\,y = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2\,x + y = 4 \\ -3\,x + y = 4 \end{cases}$

Exercice 4.21

Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x + 2\,y - 3\,z = 7 \\ y - 3\,z = 10 \\ 5\,z = -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2\,y + 3\,z = -5 \\ -x + y - 4\,z = 1 \\ 3\,y - z = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2\,y - 3\,z = 4 \\ 2\,x - y - z = 3 \\ 3\,x + 4\,z = 20 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4\,y - 2\,z = -12 \\ x + 2\,y - z = -4 \\ 3\,x + 5\,y + 3\,z = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + z = 3 \\ x + y - z = -3 \\ -x + y + z = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 15 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Solutions

Solution 4.1

a) $(x;y) \in \{(-9;14)\}$
b) $(x;y) \in \{(4;-16)\}$
c) $(x;y) \in \{(-14;-16)\}$
d) $(x;y) \in \{(-6;10)\}$
e) $(x;y) \in \{(-74;-55)\}$
f) $(x;y) \in \{(7;-4)\}$

Solution 4.2

a) $(x;y) \in \{(\frac{1}{2};\frac{5}{2})\}$
b) $(x;y) \in \{(14;3)\}$
c) $(x;y) \in \{(\frac{7}{6};\frac{11}{6})\}$
d) $(x;y) \in \{(\frac{29}{5};\frac{3}{5})\}$
e) $(x;y) \in \{(\frac{3}{7};-\frac{4}{7})\}$
f) $(x;y) \in \{(-\frac{6}{7};-\frac{41}{7})\}$

Solution 4.3

a) $(x;y) \in \{(4;28)\}$
b) $(x;y) \in \{(-46;-105)\}$
c) $(x;y) \in \{(3;-\frac{8}{5})\}$
d) $(x;y) \in \{(-\frac{3}{2};-\frac{3}{2})\}$
e) $(x;y) \in \{(\frac{73}{5};\frac{72}{5})\}$
f) $(x;y) \in \{(-4;\frac{3}{2})\}$

Solution 4.4

a) Système impossible $(x;y) \in \emptyset$
b) Système indéterminé
c) Système indéterminé
d) Système impossible $(x;y) \in \emptyset$
e) Système impossible $(x;y) \in \emptyset$
f) Système indéterminé

Solution 4.5

a) Système indéterminé
b) $(x;y) \in \{(6;14)\}$
c) $(x;y) \in \{(4;-2)\}$
d) Système indéterminé
e) $(x;y) \in \{(3;-5)\}$
f) $(x;y) \in \{(-22;58)\}$
g) Système indéterminé
h) $(x;y) \in \{(\frac{4}{3};-3)\}$
i) $(x;y) \in \{(68;17)\}$
j) $(x;y) \in \{(\frac{47}{5};3)\}$
k) Système impossible $(x;y) \in \emptyset$
l) $(x;y) \in \{(\frac{32}{3};-\frac{4}{3})\}$
m) $(x;y) \in \{(53;-15)\}$
n) Système impossible $(x;y) \in \emptyset$
o) $(x;y) \in \{(24;18)\}$
p) Système impossible $(x;y) \in \emptyset$
q) $(x;y) \in \{(-\frac{8}{7};\frac{9}{2})\}$
r) $(x;y) \in \{(-6;1)\}$

Solution 4.6
La mule a 7 sacs et l'ânesse 5.

Solution 4.7
L'un en avait 26 et l'autre 17.

Solution 4.8
Il y a 4 200 pommes.

Solution 4.9
Dimension $157{,}5\,\mathrm{m} \times 67{,}5\,\mathrm{m}$, aire $10\ 631{,}25\,\mathrm{m}^2 = 106{,}312\ 5\,\mathrm{a}$

Solution 4.10
Un croissant coûte 1 franc et 20 centimes, un pain au chocolat 1 franc et 60 centimes.

Solution 4.11
Il y a 20 billets de 10 € et 17 billets de 5 €.

Solution 4.12
Sa largeur est de 19 mètres, sa longueur de 53 mètres.

Solution 4.13
Le prix d'un feutre est de 1,70 francs et celui d'un stylo de 2,10 francs.

Solution 4.14
On donne 12 pièces de 5 francs et 18 pièces de 2 francs.

Solution 4.15
Il y a 325 garçons et 200 filles dans ce gymnase.

Solution 4.16
Il y a 21 élèves de moins de 16 ans et 12 élèves de plus de 16 ans, soit 33 élèves en tout.

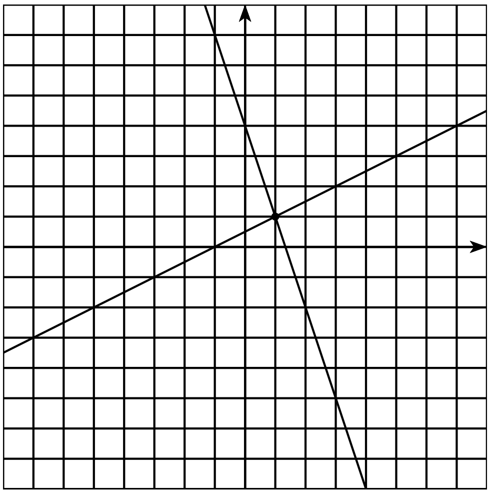
Solution 4.17
Le volume de l'or est de $92\,\text{cm}^3$ et celui du cuivre de $73\,\text{cm}^3$.

Solution 4.18
Le vendeur avait acheté 1 500 francs le premier scooter et 500 francs le second.

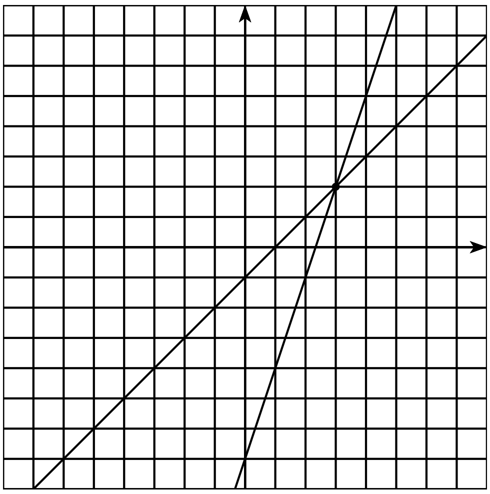
Solution 4.19
La longueur du train est de 147 mètres, sa vitesse de 21 m/s, soit 75,6 km/h.

Solution 4.20

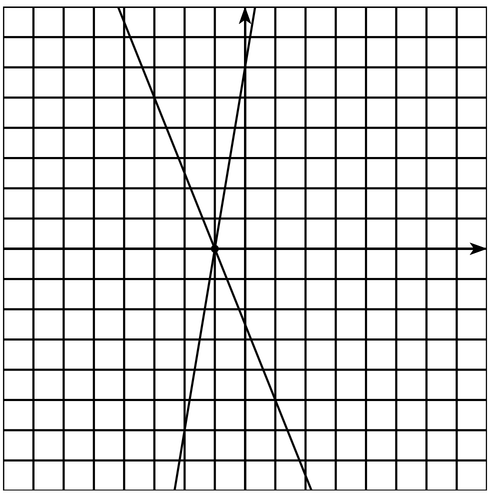
a)



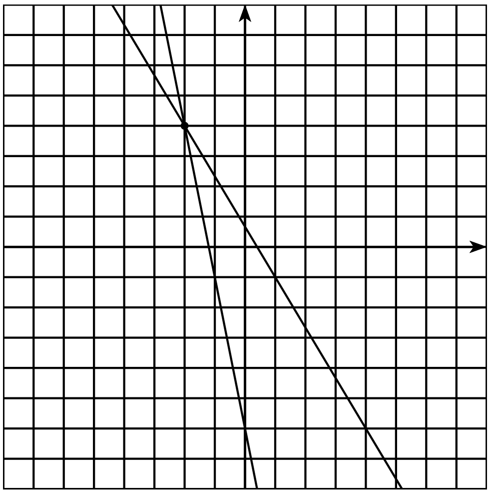
b)



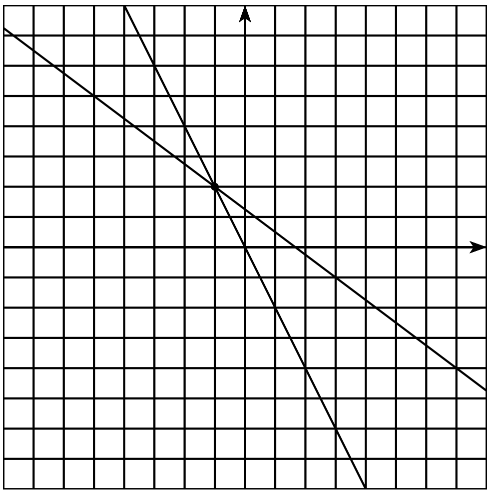
c)



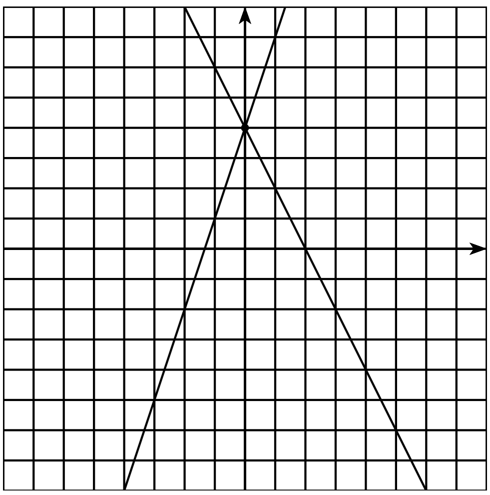
d)



e)



f)



Solution 4.21

a) $(x; y; z) = (-4; 1; -3)$

b) $(x; y; z) = (-2; 3; 1)$

c) $(x; y; z) = (4; 3; 2)$

d) $(x; y; z) = (2; -2; 2)$

e) $(x; y; z) = (-1; 2; 4)$

f) $(x; y; z) = (-5; 8; 7)$