5 Équations du deuxième degré

5.1 Formule générale

Définition
Une **équation du deuxième degré** est une équation qui peut être écrite sous la forme

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \text{ avec } a \neq 0$$

Définition
La **formule générale** permet de déterminer les solutions des équations du deuxième degré. Celles-ci sont données par

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

où $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

Définition
Δ se dit **delta**. On l'appelle le **discriminant**.

Exemple
Résolvons l'équation $2\,x^2 - x - 3 = 0$

"$-$" $\cdot$ "$-$" $=$ "$+$"

$a = 2$, $b = -1$, $c = -3$ $\Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2(-3) = 1 + 24 = 25$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-4}{4} = -1$$

Selon la valeur du discriminant, il y a trois situations possibles :
si $\Delta > 0$, alors l'équation possède deux solutions (comme ci-dessus).
si $\Delta = 0$, alors l'équation ne possède qu'une solution ($x_1 = x_2$).
si $\Delta < 0$, alors l'équation ne possède **aucune** solution.

Exemple
Résolvons l'équation $4\,x^2 - 4\,x + 1 = 0$
$a = 4$, $b = -4$, $c = 1$ $\Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

$$x_1 = x_2 = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

Exemple
Résolvons l'équation $x^2 + 2\,x + 3 = 0$
$a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ $\Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$
Donc l'équation ne possède pas de solution. En effet la $\sqrt{\text{nombre négatif}}$ n'est pas définie.

Il faut toujours ramener l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avant d'appliquer la formule.

Exemple

Résolvons l'équation $2\,x^2 - 2\,x + 5 = x^2 + 4 \quad \Big| - x^2 - 4$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1$, $b = -2$ et $c = 1$, $\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

donc $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{\cancel{2}\,1}{2 \cdot \cancel{2}} = \frac{1}{2}$

5.2 Équations bicarrées

Définition
une **équation bicarrée** est une équation qui peut être écrite sous la forme

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$$

À l'aide de la formule générale, on peut aussi résoudre des équations bicarrées. Pour ce faire, on introduit une nouvelle variable $u = x^2$ et on résout l'équation après l'avoir exprimée à l'aide de la nouvelle variable :

$$u = x^2 \Rightarrow x^4 = u^2 \Rightarrow a\,x^4 + b\,x^2 + c = a\,u^2 + b\,u + c$$

Donc on résout $a\,u^2 + b\,u + c = 0$.
Finalement, on déterminera les x correspondant aux u trouvés grâce à la formule générale.

Exemple
Résolvons l'équation $x^4 - 3\,x^2 - 4 = 0$. Introduisons $u = x^2 \Rightarrow x^4 = u^2$. Alors notre équation devient $u^2 - 3\,u - 4 = 0$.

$a = 1$, $b = -3$, $c = -4$ $\Rightarrow \Delta = (b)^2 - 4(a)(c) = 9 - 4 \cdot 1(-4) = 9 + 16 = 25$

$$u_1 = \frac{3 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3+5}{2} = 4 \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{3 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3-5}{2} = -1$$

Il reste à retrouver les x correspondant à u_1 :

$$x^2 = u_1 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Il n'y a pas de x correspondant à u_2, car $x^2 = u_2 = -1$, mais la $\sqrt{\text{nombre négatif}}$ n'est pas définie.

Cette équation bicarrée a donc deux solutions.

Il peut arriver qu'une équation bicarrée ait quatre, trois, deux, une ou zéro solutions.

5.3 Factorisation

La résolution d'équations du deuxième degré est toujours possible avec la formule générale. Cependant, il existe des méthodes de factorisation des polynômes qui permettent de gagner beaucoup de temps lors de cette résolution. Par ailleurs, ces techniques de factorisation et leurs extensions permettent de résoudre des équations de degré plus élevé que 2, contrairement à la formule générale.
Aux paragraphes 1.5 et 1.6, nous avons vu comment développer et réduire un produit. Le principe de la factorisation est de suivre le chemin inverse : à partir du résultat, il faut découvrir le point de départ, c'est-à-dire l'expression du produit avant sa réduction et son développement. Une factorisation est donc une sorte de devinette. Il est plus facile d'y répondre si on est bien entraîné à développer et réduire des produits.

Exemple
Factorisons $x^2 - 9$.

Quel produit a pu aboutir à ce résultat ?

Nous pouvons deviner, en nous souvenant de l'identité remarquable (au paragraphe 1.8)

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$$

que ce résultat s'obtient en multipliant $x + 3$ par $x - 3$. Autrement dit,

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

Nous avons transformé notre expression de départ en un produit. Nous l'avons donc **factorisée**.

5.3.1 Factorisation par mise en évidence

Illustrons la mise en évidence par un exemple concret.

Voici une liste de courses pour préparer de délicieux brownies :

Liste de courses :

500 g de farine
500 g de sucre
200 g de chocolat
150 g de noix de pécan
1 sachet de poudre à lever

Si on veut préparer le double de brownies, on peut modifier la liste de deux manières :

Liste de courses :

2·500 g de farine
2·500 g de sucre
2·200 g de chocolat
2·150 g de noix de pécan
2·1 sachet de poudre à lever

Liste de courses :
(doubler toutes les quantités !)

500 g de farine
500 g de sucre
200 g de chocolat
150 g de noix de pécan
1 sachet de poudre à lever

Pour passer de la liste de gauche à la liste de droite, nous avons mis en évidence le facteur 2 qui était commun à chacun des termes de la liste. On procède de la même manière avec les polynômes : on cherche un facteur commun, puis on indique qu'il multiplie toute la liste.

Exemple
Factorisons $2 \cdot x + 4 \cdot y + 2 \cdot z$.

Le facteur commun est 2. L'expression factorisée s'écrit $2 \cdot (x + 2\,y + z)$. Nous pouvons vérifier que cette factorisation et correcte en effectuant le produit :

$$2 \cdot (x + 2\,y + z) = 2 \cdot x + 4 \cdot y + 2 \cdot z$$

C'est bien l'expression dont nous étions partis.

Exemple
Factorisons $x^2 + 3 \cdot x$.

Le facteur commun est x. L'expression factorisée s'écrit $x \cdot (x + 3)$. Nous pouvons vérifier que cette factorisation est correcte en effectuant le produit :

$$x \cdot (x + 3) = x^2 + 3 \cdot x$$

C'est bien l'expression dont nous étions partis.

5.3.2 Factorisation du trinôme unitaire (ou méthode Somme – Produit)

Effectuons le produit $(x+2)\cdot(x+3)$.
Par distributivité, nous obtenons :

$$(x+2)\cdot(x+3) = x^2 + 2\cdot x + 3\cdot x + 6 = x^2 + 5\cdot x + 6$$

La seconde étape est la réduction (nous avons additionné les termes de même type).
Nous pouvons remarquer que le terme constant (6) est le produit de 2 et de 3 et que le coefficient du terme de degré 1 (5) est la somme de 2 et de 3. Est-ce dû au hasard ?

Réessayons avec un autre produit : $(x+4)\cdot(x+5) = x^2+4x+5x+20 = x^2+9x+20$

Nous remarquons que :
- Terme constant : $4\cdot5=20$
- Coefficient du terme de degré 1 : $4+5=9$

De manière générale, si on prend n'importe quels nombres $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$, alors

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + ax + bx + a\cdot b = x^2 + (a+b)\cdot x + a\cdot b$$

Nous remarquons que :
- Terme constant : $a\cdot b$
- Coefficient du terme de degré 1 : $a+b$

On en déduit une méthode de factorisation des polynômes de deuxième degré dont le coefficient du terme de degré 2 vaut 1 (ceux qu'on appelle les **trinômes unitaires**). La technique consiste à trouver deux nombres dont le produit donne le terme constant et dont la somme donne le coefficient du terme de degré 1. Pour cette raison, cette méthode de factorisation est parfois appelée la méthode **Somme – Produit**.

Exemple
Factorisons $x^2 - 5\,x + 4$. Le coefficient du terme de degré 2 vaut 1, nous pouvons donc utiliser la méthode du trinôme unitaire. Nous devons trouver deux nombres réels dont le produit vaut 4 (terme constant) et la somme vaut -5 (coefficient du terme de degré 1). Nous dressons donc une liste de paires de nombres dont le produit vaut 4 :

$1 \cdot 4$
$2 \cdot 2$
$(-1) \cdot (-4)$
$(-2) \cdot (-2)$

Nous déterminons ensuite quelle paire convient pour obtenir une somme de -5 :

La paire de nombres recherchée est -1 et -4.

Nous pouvons donc factoriser : $x^2 - 5\,x + 4 = (x - 1) \cdot (x - 4)$.

Pour vérifier que cette factorisation est correcte, nous effectuons le produit :

$$(x - 1) \cdot (x - 4) = x^2 - x - 4x + 4 = x^2 - 5x + 4$$

Exemple
Factorisons $x^2 + 3\,x - 10$.

- Produit : -10
- Somme : 3

La liste de paires de candidats : $-1 \cdot 10$, $-2 \cdot 5$, $-5 \cdot 2$, $-10 \cdot 1$

La bonne paire : $-2 \cdot 5$

Factorisation : $x^2 + 3\,x - 10 = (x - 2)(x + 5)$

Vérification :

$$(x - 2) \cdot (x + 5) = x^2 - 2x + 5x - 10 = x^2 + 3\,x - 10$$

5.3.3 Factorisation avec les identités remarquables

Rappelons ici les identités remarquables énoncées au paragraphe 1.8 :

Identités remarquables de degré 2

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$

En utilisant ces identités remarquables de gauche à droite, nous développons et réduisons plus rapidement.

Exemple
Déterminons **sans machine** le carré de 29.

Remarquons tout d'abord que $29 = 30 - 1$.
Appliquons ensuite la deuxième identité remarquable :

$$29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2\cdot 30\cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$$

En utilisant ces identités remarquables de droite à gauche, nous pouvons factoriser.

Exemple
Factorisons $x^2 - 10\,x + 25$.

L'expression comporte trois termes. Donc, nous allons utiliser une des deux premières identités. Le signe "$-$" nous indique que la deuxième est appropriée.

Identifions termes à termes les membres de notre expression :

$A^2 = x^2 \Rightarrow A = x$ et $B^2 = 25 \Rightarrow B = 5$.

Il faut vérifier que, dans ces conditions, on a bien $-2\,A\,B = -10\,x$. Or $-2\,A\,B = -2\cdot x\cdot 5$.
C'est donc correct : $A = x$ et $B = 5$, et l'expression de départ se factorise

$$x^2 - 10\,x + 25 = (x-5)^2$$

5.4 Résolution d'équations par factorisation

L'objectif de la factorisation est de résoudre plus rapidement des équations du deuxième degré, voire de résoudre des équations de degré plus élevé.
Le raisonnement est le suivant : pour que le produit de deux facteurs soit nul, il faut qu'un des facteurs au moins soit nul. En effet :

$$0 \cdot \text{ un nombre réel } = \text{ un nombre réel } \cdot 0 = 0$$

Si on s'intéresse à un produit de plus de deux facteurs, on a toujours la condition qu'au moins un des facteurs est nul.

Exemple
Résolvons $(x+7)\cdot(x-6)\cdot(x+41)\cdot(x-\frac{1}{2}) = 0$

Pour que $(x+7)\cdot(x-6)\cdot(x+41)\cdot(x-\frac{1}{2})$ vaille zéro, il faut qu'un des facteurs au moins soit nul. Les solutions de l'équation à résoudre sont donc données par les valeurs de x qui annulent au moins un des facteurs.

$$\left.\begin{array}{lll} x+7 & = 0 \Leftrightarrow & x = -7 \\ x-6 & = 0 \Leftrightarrow & x = 6 \\ x+41 & = 0 \Leftrightarrow & x = -41 \\ x-\frac{1}{2} & = 0 \Leftrightarrow & x = \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Donc $(x+7)\cdot(x-6)\cdot(x+41)\cdot(x-\frac{1}{2}) = 0$
$\Leftrightarrow x = -7$ ou $x = 6$ ou $x = -41$ ou $x = \frac{1}{2}$,
c'est-à-dire $S = \{-7; 6; -41; \frac{1}{2}\}$.

Exemple
Résolvons $x^3 - 13\,x^2 + 42\,x = 0$

Nous allons factoriser le membre de gauche, puis résoudre l'équation en suivant le même raisonnement que ci-dessus.
Premièrement, x est facteur commun. Nous pouvons donc le mettre en évidence.

$$x^3 - 13\,x^2 + 42\,x = x\cdot(x^2 - 13\,x + 42)$$

Essayons d'appliquer ensuite la méthode Somme – Produit.

— Produit : 42

— Somme : -13

La liste de paires de candidats : $1\cdot 42 = 2\cdot 21 = 3\cdot 14 = 6\cdot 7 = (-6)(-7) = (-3)(-14) = (-2)(-21) =$
$= (-1)(-42)$

La bonne paire : $(-6)(-7)$

Factorisation : $x^2 - 13\,x + 42 = (x-6)(x-7)$

Donc $x^3 - 13\,x^2 + 42\,x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x -6)\cdot(x -7) = 0$.

Alors $x = 0$ ou $x = 6$ ou $x = 7$, c'est-à-dire $S = \{0; 6; 7\}$.

5.5 Problèmes

Savoir résoudre une équation du deuxième degré permet de résoudre de nombreux problèmes.

Exemple

Le propriétaire d'une usine souhaite doubler la superficie du bâtiment en augmentant sa largeur et sa longueur du même nombre de mètres. Il demande de trouver les dimensions des parties à construire pour respecter cette contrainte. L'immeuble mesure actuellement 40 m par 60 m.

Appelons L la largeur actuelle de l'immeuble et l sa longueur. Nous savons que $L = 40$ et $l = 60$.

Nous voulons augmenter L et l du même nombre de mètres. Mais ce nombre est inconnu. C'est le nombre que nous devons déterminer. Appelons-le x. La nouvelle largeur de l'immeuble vaudra donc $40 + x$ et sa nouvelle longueur vaudra $60 + x$.

Il faut déterminer x pour que la superficie de la nouvelle usine soit le double de la superficie de l'actuelle. Calculons la superficie actuelle : $L \cdot l = 40 \cdot 60 = 2400$ m^2. Le nouvel immeuble aura donc une superficie de $2 \cdot 2400 = 4800$ m^2.

Nous devons donc résoudre l'équation $(40+x)\cdot(60+x) = 4800$ pour répondre à la question.

$(40 + x) \cdot (60 + x) = 4800 \Leftrightarrow 2400 + 40\,x + 60\,x + x^2 = 4800 \Leftrightarrow x^2 + 100\,x - 2400 = 0.$

Alors $\Delta = 19600$, donc $x_1 = \frac{-100+140}{2}$ et $x_2 = \frac{-100-140}{2}$, c'est-à-dire $x_1 = 20$ et $x_2 = -120$.

Cependant la valeur x_2 n'a aucun sens. En effet, puisque nous voulons augmenter la superficie de l'usine, nous ne pouvons pas diminuer ses dimensions.

Finalement, il faut augmenter de 20 mètres la largeur et la longueur du bâtiment pour en doubler la superficie. La nouvelle largeur vaudra 60 m et la nouvelle longueur vaudra 80 m.

Nous pouvons vérifier ce résultat : $(40 + 20) \cdot (60 + 20) = 60 \cdot 80 = 4800$ m^2, qui est bien le double de la surface de départ.

Exercices

Exercice 5.1

Résoudre

a) $x^2 - 7\,x + 10 = 0$
b) $2\,x^2 + 14\,x + 20 = 0$
c) $x^2 + x + 1 = 0$
d) $x^2 - 100 = 0$
e) $-2\,x^2 - 12\,x + 14 = 0$
f) $x^2 + 16 = 8\,x$
g) $x^2 - 3\,x = 0$
h) $x^2 + 3 = 0$
i) $x^2 - 3 = 0$
j) $5\,x^2 - 4\,x = 1$
k) $7\,x^2 + x + 2 = 0$
l) $3\,x^2 + 30\,x + 75 = 0$
m) $6\,x^2 + 5\,x + 1 = 0$

Exercice 5.2

Inventer une équation du deuxième degré

a) qui a deux solutions
b) qui n'a aucune solution
c) qui n'a qu'une seule solution

Exercice 5.3

Résoudre

a) $x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0$
b) $x^4 + 5\,x^2 + 4 = 0$
c) $x^4 + x^2 - 6 = 0$
d) $x^4 - 100 = 0$
e) $x^4 - 25\,x^2 = 0$
f) $36\,x^4 + 13\,x^2 + 1 = 0$

Exercice 5.4

Factoriser par mise en évidence

a) $x^2 + x$
b) $5\,x + 10$
c) $3\,x^2 + 9\,x + 15$
d) $4\,(x + 1) + 4\,(x + 2)$
e) $12\,x^4 + 16\,x^3 - 20\,x^2 + 4\,x$
f) $7\,x \cdot (x+2) + 8\,x \cdot (x+2) + 9\,x \cdot (x+2)$
g) $(x + 1) \cdot (x + 4) + 3\,(x + 1)$
h) $(x + 4) \cdot (x + 1) + (x + 3) \cdot (x + 1)$

Exercice 5.5

Factoriser par la méthode somme-produit

a) $x^2 + 7\,x - 18$
b) $x^2 - 3\,x - 18$
c) $x^2 - 17\,x + 72$
d) $x^2 + 13\,x + 42$
e) $x^2 - 8\,x + 15$
f) $x^2 - x - 56$
g) $x^2 - 5\,x - 24$
h) $x^2 + 2\,x - 24$

Exercice 5.6

Factoriser à l'aide des identités remarquables

a) $x^2 - 10\,x + 25$
b) $x^2 - 81$
c) $x^2 + 8\,x + 16$
d) $x^4 - 49$
e) $x^2 - 16\,x + 64$
f) $x^6 - 1$
g) $4\,t^2 + 24\,t + 36$
h) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
i) $81\,x^4 - 18\,x^2 + 1$
j) $z^4 - \frac{1}{625}$

Exercice 5.7

Factoriser

a) $x^2 - 20\,x + 100$
b) $x^2 - 12\,x + 32$
c) $4\,x^2 - 1$
d) $x^2 + 3\,x$
e) $x^2 - \frac{1}{100}$
f) $y^2 + 4\,y + 4$
g) $y^2 + 4\,y + 3$
h) $2\,x^2 + 2\,x$

Exercice 5.8

Factoriser au maximum

a) $x^3 + 10x^2 + 25\,x$
b) $x^4 - 81$
c) $2\,x^4 + 16\,x^3 + 32\,x^2$
d) $x^3 - 2\,x^2 - 8\,x$
e) $x^3 - 6\,x^2 + 9\,x$
f) $3\,x^3 - 75\,x$
g) $7\,x^4 - 35\,x^3 + 42\,x^2$
h) $8\,x^3 + 8\,x^2 + 3\,x + 3$

Exercice 5.9

Résoudre

a) $(x+3)\cdot(x-5) = 0$
b) $7\,(3\,x+9)\cdot(3\,x-1) = 0$
c) $(2-x)\cdot(1-4\,x)\cdot(8\,x+4)\cdot(x-100) = 0$
d) $5\,(x^2+9)\cdot(2\,x-1) = 0$
e) $(x^2 - \frac{1}{4})\cdot(x^2 + \frac{1}{9}) = 0$
f) $(x^2-2)\cdot(x+12) = 0$
g) $x\cdot(x-7)^8 = 0$
h) $(x-3)^2\cdot(x+8)^2 = 0$

Exercice 5.10

Inventer une équation du deuxième degré

a) qui a deux solutions
b) qui n'a aucune solution
c) qui n'a qu'une seule solution

Exercice 5.11

Résoudre par factorisation

a) $x^2 - 2\,x + 1 = 0$

b) $x^2 + 1 = 0$

c) $x^2 - x - 12 = 0$

d) $x^2 + x - 12 = 0$

e) $x^2 - \frac{1}{9} = 0$

f) $x^2 + 22\,x + 121 = 0$

g) $x^2 + 13\,x + 36 = 0$

h) $x^3 - 144\,x = 0$

Exercice 5.12

Résoudre par factorisation

a) $x^3 - 5\,x^2 + 6\,x = 0$

b) $2\,x^3 + 24\,x^2 + 72\,x = 0$

c) $x^4 - \frac{1}{81} = 0$

d) $x^3 - 7\,x^2 + 12\,x = 0$

e) $4\,x^3 + 8\,x^2 + 4\,x = 0$

f) $x^3 - x = 0$

g) $(x + 7) \cdot (x + 3) + 5\,(x + 7) = 0$

h) $x^8 - 16 = 0$

Exercice 5.13

Résoudre

a) $2\,x^3 + x^2 - x = 0$

b) $3\,x^2 + 39\,x + 120 = 0$

c) $x^4 - 8\,x^2 + 16 = 0$

d) $6\,x^3 + 14\,x^2 + 4\,x = 0$

e) $(x^2 + 9) \cdot (x^2 - 9) \cdot (4 - x) = 0$

f) $(5\,x^2 + 26\,x + 5) \cdot (x^2 - 15\,x + 50) = 0$

g) $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$

h) $8\,(x^2 - 8\,x + 7) + x \cdot (x^2 - 8\,x + 7) = 0$

Exercice 5.14

Une peinture et son cadre forment un rectangle de 90 cm par 120 cm. Sachant que l'aire du cadre est égale à l'aire de la toile peinte, trouver la largeur du cadre.

Exercice 5.15

Une page de 80 mm par 120 mm a une marge d'égale largeur partout. Sachant que le texte imprimé occupe les 5/8 de la page, trouver la largeur de la marge.

Exercice 5.16

La municipalité gère un parc de 240 mètres de long par 160 mètres de large et désire doubler sa superficie. Cet agrandissement devra se faire en conservant la forme rectangulaire. Pour ce faire, la municipalité envisage d'ajouter des bandes de terrain d'égale largeur sur une longueur et une largeur du parc existant. Calculer la largeur de ces bandes de terrain.

Exercice 5.17

Un terrain rectangulaire de 26 m sur 30 m est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire du trottoir est de 240 m^2, quelle est sa largeur ?

Exercice 5.18

Le nombre d'or est le nombre positif noté ϕ dont le carré est égal à lui-même plus 1. Combien vaut-il ?

Exercice 5.19
Pierre lance une pierre horizontalement à une vitesse $v = 10$ m/s du haut d'un pont à 50 m au-dessus de l'eau. Quel temps faut-il pour que la pierre tombe dans l'eau ?

Données physiques :

— Un caillou lancé horizontalement a parcouru au bout de t secondes une distance x, exprimée en mètres par
$$x = 4,9\,t^2$$

Exercice 5.20
Pierre lance une pierre verticalement à une vitesse $v = 10$ m/s vers le haut, par dessus la barrière d'un pont à 50 m au-dessus de l'eau. Quel temps faut-il pour que la pierre tombe dans l'eau ?

Données physiques :

— Un caillou lancé verticalement à vitesse v dirigée vers le haut a parcouru au bout de t secondes une distance x, exprimée en mètres par
$$x = 4,9\,t^2 - v \cdot t$$

Pour aller plus loin

Exercice 5.21

Factoriser au maximum

a) $7x^3 + 14x^2 + 5x + 10$
b) $5x^3 + 2x^2 - 5x - 2$
c) $9t^3 - 4t^2 - 9t + 4$
d) $4x^3 + 4x^2 - x - 1$
e) $6x^3 - 8x^2 + 3x - 4$
f) $10x^3 - 3x^2 - 10x + 3$
g) $x^3 - x^2 - x + 1$
h) $x^6 - 25x^4 - x^2 + 25$

Exercice 5.22

Résoudre

a) $x^5 - 15x^3 + 54x = 0$
b) $28x^4 + 12x^3 - 7x^2 - 3x = 0$
c) $(x+3)\cdot(x-2) = (4-x)\cdot(x-2)$
d) $x^9 - 17x^5 + 16x = 0$

Exercice 5.23

On sait que la somme $1 + 2 + 3 + ... + x = \frac{x\cdot(x+1)}{2}$

a) Savez-vous le prouver ?
b) Jusqu'où faut-il faire la somme pour obtenir juste un peu plus qu'un million ?

Exercice 5.24

Pierre laisse tomber une pierre dans un puits et il entend, au bout de 3 secondes, un plouf. Quelle est la profondeur du puits ?

Données physiques :

— Un caillou en chute libre, lâché sans vitesse initiale, a parcouru au bout de t secondes une distance x, exprimée en mètres par

$$x = 4,9\,t^2$$

— La vitesse du son est de 340 mètres par seconde.

Exercice 5.25

Une ficelle de 89 cm est fixée à deux clous A et B distants de 65 cm.

a) On tend la ficelle jusqu'à un point C de sorte que le triangle ABC soit rectangle en A. Calculer les longueurs AC et BC.
b) On tend la ficelle jusqu'à un point C de sorte que le triangle ABC soit rectangle en C. Calculer les longueurs AC et BC.

Exercice 5.26

On doit partager une somme de 30000 francs entre un certain nombre de personnes. S'il y avait 4 personnes de moins, la part de chacune serait augmentée de 1250 francs. Combien sont-ils ?

Solutions

Solution 5.1

a) $S = \{2; 5\}$
b) $S = \{-2; -5\}$
c) $S = \emptyset$
d) $S = \{-10; 10\}$
e) $S = \{-7; 1\}$
f) $S = \{4\}$
g) $S = \{0; 3\}$
h) $S = \emptyset$
i) $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$
j) $S = \{-\frac{1}{5}; 1\}$
k) $S = \emptyset$
l) $S = \{-5\}$
m) $S = \{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\}$

Solution 5.2

Demandez à votre voisin de résoudre votre équation.

Solution 5.3

a) $S = \{-2; -1; 1; 2\}$
b) $S = \emptyset$
c) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
d) $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$
e) $S = \{-5; 0; 5\}$
f) $S = \{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\}$

Solution 5.4

a) $x \cdot (x+1)$
b) $5\,(x+2)$
c) $3\,(x^2 + 3\,x + 5)$
d) $4\,(2x+3)$
e) $4\,x \cdot (3\,x^3 + 4x^2 - 5x + 1)$
f) $24\,x \cdot (x+2)$
g) $(x+1) \cdot (x+7)$
h) $(x+1) \cdot (2x+7)$

Solution 5.5

a) $(x-2) \cdot (x+9)$
b) $(x+3) \cdot (x-6)$
c) $(x-9) \cdot (x-8)$
d) $(x+6) \cdot (x+7)$
e) $(x-5) \cdot (x-3)$
f) $(x-8) \cdot (x+7)$
g) $(x-8) \cdot (x+3)$
h) $(x+6) \cdot (x-4)$

Solution 5.6

a) $(x-5)^2$
b) $(x+9) \cdot (x-9)$
c) $(x+4)^2$
d) $(x^2+7) \cdot (x+\sqrt{7}) \cdot (x-\sqrt{7})$
e) $(x-8)^2$

f) $(x^3+1)\cdot(x^3-1)=(x^3+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

g) $(2\,t+6)^2$

h) $(x-\frac{1}{2})^2$

i) $((3\,x-1)\cdot(3\,x+1))^2$

j) $(z^2+\frac{1}{25})\cdot(z+\frac{1}{5})\cdot(z-\frac{1}{5})$

Solution 5.7

a) $(x-10)^2$

b) $(x-4)\cdot(x-8)$

c) $(2\,x-1)\cdot(2\,x+1)$

d) $x\cdot(x+3)$

e) $(x-\frac{1}{10})\cdot(x+\frac{1}{10})$

f) $(y+2)^2$

g) $(y+1)\cdot(x+3)$

h) $2\,x\cdot(x+1)$

Solution 5.8

a) $x\cdot(x+5)^2$

b) $(x^2+9)\cdot(x-3)\cdot(x+3)$

c) $2\,x^2\cdot(x+4)^2$

d) $x\cdot(x-4)\cdot(x+2)$

e) $x\cdot(x-3)^2$

f) $3\,x\cdot(x+5)\cdot(x-5)$

g) $7\,x^2\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

h) $(8\,x^2+3)\cdot(x+1)$

Solution 5.9

a) $S=\{-3;5\}$

b) $S=\{-3;\frac{1}{3}\}$

c) $S=\{2;\frac{1}{4};-\frac{1}{2};100\}$

d) $S=\{\frac{1}{2}\}$

e) $S=\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\}$

f) $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-12\}$

g) $S=\{0;7\}$

h) $S=\{3;-8\}$

Solution 5.10
Il suffit de partir de la forme factorisée, de la développer et de la réduire.

Solution 5.11

a) $S=\{1\}$

b) $S=\emptyset$

c) $S=\{-3;4\}$

d) $S=\{3;-4\}$

e) $S=\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\}$

f) $S=\{-11\}$

g) $S=\{-4;-9\}$

h) $S=\{0;-12;12\}$

Solution 5.12

a) $S = \{0; 2; 3\}$
b) $S = \{0; -6\}$
c) $S = \{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\}$
d) $S = \{0; 3; 4\}$
e) $S = \{-1; 0\}$
f) $S = \{-1; 0; 1\}$
g) $S = \{-8; -7\}$
h) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Solution 5.13

a) $S = \{0; -1; \frac{1}{2}\}$
b) $S = \{-5; -8\}$
c) $S = \{-2; 2\}$
d) $S = \{-2; 0; -\frac{1}{3}\}$
e) $S = \{-3; 3; 4\}$
f) $S = \{-5; -\frac{1}{5}; 5; 10\}$
g) $S = \{-3; -2; 2; 3\}$
h) $S = \{-8; 1; 7\}$

Solution 5.14
La largeur du cadre est de 15 cm.

Solution 5.15
La largeur de la marge est de 10 mm.

Solution 5.16
La largeur des bandes est de 80 m.

Solution 5.17
La largeur du trottoir est de 2 m.

Solution 5.18
$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$

Solution 5.19
Le temps de chute est d'environ 3.19 secondes.

Solution 5.20
Le temps de chute est d'environ 4.37 secondes.

Solution 5.21

a) $(7\,x^2 + 5) \cdot (x + 2)$
b) $(5x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$
c) $(9\,t - 4) \cdot (t + 1) \cdot (t - 1)$
d) $(2\,x - 1) \cdot (2\,x + 1) \cdot (x + 1)$
e) $(2\,x^2 + 1) \cdot (3\,x - 4)$
f) $(10x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$
g) $(x + 1) \cdot (x - 1)^2$
h) $(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+5)\cdot(x-5)$

Solution 5.22

a) $S = \{-3; -\sqrt{6}; 0; \sqrt{6}; 3\}$
b) $S = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{7}\}$
c) $S = \{\frac{1}{2}; 2\}$
d) $S = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Solution 5.23

a) Indication : On peut grouper le premier nombre de la liste avec le dernier, le deuxième avec l'avant dernier et ainsi de suite.
b) jusqu'à 1414

Solution 5.24
La profondeur du puits est de 40,65 mètres.

Solution 5.25

a) 20,76 et 68,24 cm.
b) 33 et 56 cm.

Solution 5.26
Il y a 12 personnes.