Mathématiques 1C

Rachel Bendjama Faller
Muriel Chaubert
Luc Dessauges
Jacques Ferrez

Gymnase de Chamblandes

Table des matières

1 Calcul numérique et littéral **1**
1.1 Les opérations 1
1.2 Les fractions 3
1.3 Les puissances 5
1.4 Notation scientifique 7
1.5 Les Monômes 8
1.6 Les Polynômes 10
1.7 Evaluation d'une expression littérale 11
1.8 Identités remarquables 12
1.9 Equations du premier degré 14
1.10 Inéquations du premier degré 16

2 Proportionnalité **32**
2.1 Rapports 32
2.2 Proportions 33
2.3 Applications 34

3 Fonction affines **50**
3.1 Généralités 50
3.2 Détermination d'une fonction affine 57
3.3 Modélisation 61

4 Systèmes d'équations **74**

5 Équations du deuxième degré **83**
5.1 Formule générale 83
5.2 Équations bicarrées 85
5.3 Factorisation 86
5.4 Résolution d'équations par factorisation 92
5.5 Problèmes 93

6 Manipulation de formules **103**

7 Trigonométrie **107**
7.1 Comment se repérer sur la terre ? 107
7.2 Le radian 109
7.3 Trigonométrie du triangle rectangle 111

1 Calcul numérique et littéral

1.1 Les opérations

Rappel
Les opérations élémentaires sont

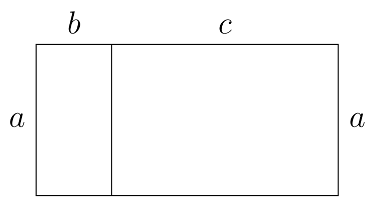
- l'addition,
- la soustraction,
- la multiplication,
- la division.

Propriétés
Ces opérations ont plusieurs propriétés qui peuvent être utiles pour simplifier les calculs.

- L'addition est
  - commutative, on peut échanger les deux termes : $a+b=b+a$
    $6+81=81+6=87$
    $0,13+7,67=7,67+0,13=7,8$
  - associative, on peut grouper les termes que l'on veut : $(a+b)+c=a+(b+c)$
    $(23+42)+18=23+(42+18)=23+60=83$
    $1,14+(3,26+2,34)=(1,14+3,26)+2,34=4,4+2,34=6,74$
- La multiplication est
  - commutative, on peut échanger les deux facteurs $a\cdot b=b\cdot a$
    $12\cdot 3=3\cdot 12=36$
    $1,34\cdot 2=2\cdot 1,34=2,68$
  - associative, on peut grouper les facteurs que l'on veut : $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
    $(13\cdot 25)\cdot 4=13\cdot(25\cdot 4)=13\cdot 100=1300$
    $2\cdot(0,5\cdot 13)=(2\cdot 0,5)\cdot 13=1\cdot 13=13$
  - distributive par rapport à l'addition, $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

    Les côtés du grand rectangle mesurent a et $b+c$, son aire vaut donc $a\cdot(b+c)$.
    L'aire du petit rectangle vertical vaut $a\cdot b$ alors que celle du petit rectangle horizontal vaut $a\cdot c$.
    Comme l'aire du grand rectangle est égale à la somme des aires des deux petits rectangles, on a bien

    $$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

    $8\cdot(9+4)=8\cdot 9+8\cdot 4=72+32=104$
    $7\cdot 50+7\cdot 51=7\cdot(50+51)=7\cdot 101=707$
- La soustraction et la division ne vérifient aucune de ces propriétés.

Rappel
Un signe $-$ devant une parenthèse a le même effet qu'une multiplication par -1, on doit le distribuer

$$-(a+b) = (-1)\cdot(a+b) = (-1)\cdot a + (-1)\cdot b = -a-b$$

Au contraire, un signe $-$ devant une multiplication ne doit **pas** être distribué

$$-(a\cdot b) = (-1)\cdot(a\cdot b) = ((-1)\cdot a)\cdot b = -a\cdot b$$

Priorité des opérations
Dans une expression qui contient plusieurs opérations, il est important d'effectuer ces opérations dans le bon ordre, c'est-à-dire en commençant par

a) le contenu des parenthèses, avec les parenthèses intérieures en premier,
b) les puissances et les racines,
c) les multiplications et les divisions, de gauche à droite,
d) les additions et les soustractions, de gauche à droite.

$$\begin{aligned} 1+2-3\cdot 4:2+(5-6)\cdot 7 &= 1+2-3\cdot 4:2+(-1)\cdot 7 \\ &= 1+2-6-7 \\ &= -10 \end{aligned}$$

On a effectué, dans l'ordre, la parenthèse, puis les multiplications et les divisions, de gauche à droite et, pour finir, les additions et les soustractions, également de gauche à droite.

Exemples
Effectuer.

a) $7+6+3 = 7+3+6 = 10+6 = 16$
b) $14\cdot 13+14\cdot 7$
c) $3\cdot 4+5\cdot 12-6\cdot 2$
d) $5\cdot 6+12:3+6:2$
e) $8\cdot 6-4:4+1\cdot 2$
f) $25-10:5+5-1\cdot 5$
g) $240:8:4\cdot 2+8$
h) $3\cdot 8:4\cdot 6:6+4$
i) $100-50-40+10$
j) $150-(10+50):5$
k) $20-(3+(10-7)\cdot 3)$
l) $(100-(50-(40-9)))\cdot 2$
m) $3\cdot 3\cdot 3\cdot 2-2\cdot(6-3)$
n) $(5+6)\cdot 4-4\cdot(15-4)$

1.2 Les fractions

Multiplication
Pour multiplier deux nombres rationnels, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$
Si la fraction obtenue peut être réduite, on la réduit.

Exemples

a) $\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$

b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} = \frac{8}{15}$

c) $\frac{5}{7} \cdot \frac{2}{10} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 10} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$

d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{12}{7} = \frac{2 \cdot 12}{3 \cdot 7} = \frac{24}{21} = \frac{8}{7}$

Addition
Pour additionner deux nombres rationnels, deux étapes sont nécessaires.

a) On met les deux fractions au même dénominateur.

b) Une fois que les deux fractions sont au même dénominateur, on additionne les numérateurs et on conserve le dénominateur commun.

Avec les fractions
$$\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{c}{d}$$
cela donne

a) la mise au même dénominateur
$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} = \frac{ad}{bd} \qquad \text{et} \qquad \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{cb}{db} = \frac{bc}{bd}$$

b) l'addition des numérateurs
$$\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Exemples

a) $\frac{5}{3} + \frac{4}{7} = \frac{5 \cdot 7}{3 \cdot 7} + \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{35}{21} + \frac{12}{21} = \frac{47}{21}$

b) $\frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{6 \cdot 3} = \frac{4}{18} + \frac{3}{18} = \frac{7}{18}$

Remarque
Dans le deuxième exemple, la mise au même dénominateur s'est faite en utilisant le fait que le plus petit multiple commun (PPMC) de 9 et 6 est 18.

Soustraction
Pour soustraire deux fractions, on procède comme pour l'addition : on commence par mettre les fractions au même dénominateur puis on effectue la soustraction.

Exemples

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{15}{20} - \frac{4}{20} = \frac{11}{20}$

b) $\frac{7}{10} - \frac{1}{15} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{15 \cdot 2} = \frac{21}{30} - \frac{2}{30} = \frac{19}{30}$

Division
Pour diviser deux fractions, on multiplie la première par l'inverse de la deuxième

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Exemples

a) $\frac{7}{3} : \frac{5}{8} = \frac{7}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{7 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{56}{15}$

b) $\frac{5}{9} : \frac{10}{27} = \frac{5}{9} \cdot \frac{27}{10} = \frac{5 \cdot 27}{9 \cdot 10} = \frac{5 \cdot 3 \cdot 9}{9 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{3}{2}$

1.3 Les puissances

Définition
Si n est un entier positif $(0, 1, 2, \ldots)$, la n-ème puissance d'un nombre a, que l'on note a^n, est le nombre obtenu par la multiplication du nombre a, n fois

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fois}}$$

La 2-ème puissance est appelée *carré*

$$a^2 = a \cdot a$$

La 3-ème puissance est appelée *cube*

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

Exemples
Effectuer

a) 6^2

b) 2^5

Propriétés

a) $(ab)^n = a^n b^n$

b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (\text{si } b \neq 0)$

c) $a^m a^n = a^{m+n}$

d) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

e) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemples
On a donc

a) $2^7 \cdot 3^7 = (2 \cdot 3)^7 = 6^7$

b) $\frac{4^3}{2^3} = \left(\frac{4}{2}\right)^3 = 2^3 = 8$

c) $7^4 \cdot 7^6 = 7^{4+6} = 7^{10}$

d) $\frac{7^{10}}{7^4} = 7^{10-4} = 7^6$

e) $(2^5)^4 = 2^{5 \cdot 4} = 2^{20}$

Exemples
Simplifier.

a) $3^3 \cdot 4^3$

b) $\dfrac{6^7}{3^7}$

c) $2^8 \cdot 2^{12}$

d) $\dfrac{5^{17}}{5^7}$

e) $(4^5)^6$

Remarque
Si n est un entier positif $(0, 1, 2 \ldots)$, le nombre a^{-n} est défini par $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.
Par exemple, $a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$.

Exemples
Ecrire sans puissance.

a) 10^{-1}

b) $25 \cdot 5^{-3}$

1.4 Notation scientifique

En sciences, on travaille souvent avec des nombres très grands ou très petits. Par exemple la distance entre la Terre et la planète Mars est de 55'758'000 km, alors que la taille d'un élément de microprocesseur (un transistor) mesure 0,000022 mm. Ces nombres ne sont pas pratiques à écrire. Les scientifiques les écrivent comme la multiplication d'un nombre entre 1 et 10 (10 non compris), avec éventuellement un signe moins, et une puissance entière de 10. On a ainsi, pour la distance entre la Terre et Mars

$$55'758'000 \text{ km} = 55'758'000'000 \text{ m} = 5,5758 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

et pour la taille d'un transistor

$$0,000022 \text{ mm} = 0,000000022 \text{ m} = 2,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

qui sont plus faciles à écrire.

Exemples
Ecrire les nombres suivants en notation scientifique.

a) 193100000
b) 0,0006111
c) 283
d) -42828
e) 0,07
f) 3,74

1.5 Les Monômes

Définition
Un monôme est un nombre réel, une variable (c'est-à-dire une lettre), ou le produit de la multiplication de nombres et de variables.

Exemples

a) 16 b) a c) $3x$ d) $6x^2y$

Remarque
Les monômes se notent sous forme réduite, c'est-à-dire en premier les nombres, multipliés, c'est le coefficient, puis les variables (en regroupant les variables identiques avec un exposant si nécessaire), c'est la partie littérale.

Exemples
Ecrire les monômes suivant sous forme réduite.

a) $3 \cdot 3 \cdot 3$
b) $2 \cdot a \cdot 2$
c) $3 \cdot x \cdot x$
d) $x \cdot 3 \cdot y \cdot 2 \cdot x$

Définition
On appelle monômes semblables des monômes dont les parties littérales sont identiques.

Multiplication
Pour multiplier des monômes entre eux, on multiplie les coefficients entre eux et les parties littérales entre elles, par exemple

$$2x \cdot 3y = 2 \cdot 3 \ \cdot \ x \cdot y = 6xy$$

Exemple
Effectuer.

a) $2xy^2 \cdot 5x^3y$ b) $(ab)(-2a^3b^2)$

Addition et soustraction
Pour additionner deux monômes semblables, on additionne les coefficients et on conserve la partie littérale, par exemple

$$4x^3y + 3x^3y = (4+3) \cdot x^3y = 7x^3y$$

Pour soustraire deux monômes semblables, on soustrait les coefficients et on conserve la partie littérale, par exemple

$$12abc - 7abc = (12-7) \cdot abc = 5abc$$

Exemples
Effectuer

a) $3ab^2 - 9ab^2 + 4ab^2$

b) $z + \frac{1}{3}z - \frac{8}{9}z$

Définition
Le degré d'un monôme est la somme des degrés de ses différentes variables.

Exemples
Déterminer le degré des monômes

a) 16

b) a

c) $3x$

d) $6xy$

e) $6x^2y$

f) $5abc$

1.6 Les Polynômes

Définition
Un polynôme est une somme de monômes. Son degré est le plus élevé des degrés des monômes qui le composent.

Exemples
Déterminer le degré des polynômes suivants.

a) $3x^2 - 4x + 2$

b) $3x^2 + x - 2y$

c) $2xy + 3x$

d) $a + b + c + d$

e) $3x^2y + 2xy^2 - x^4$

f) $17abcd + 23a^2b$

Addition et soustraction
Pour additionner ou soustraire des polynômes, on additionne ou on soustrait les monômes qui constituent chacun de ces polynômes.

Exemples

a) $(3x^2 - 5x + 1) + (-3x^2 + 7x + 4)$

b) $(4x^3 + 3x^2 - 2x + 7) + (x^2 + 2x - 4)$

c) $(x^2y^3 - 2x^3y + 2xy^2 - 5x) + (2x^3y + xy^2 + x - y)$

d) $(5x^3 - 7x^2 + 3) - (-8x^2 + 3x - 2)$

Multiplication
Pour multiplier deux polynômes, on multiplie chaque monôme du premier polynôme avec chaque monôme du deuxième polynôme. Le degré du polynôme obtenu est égal à la somme des degrés des deux polynômes multipliés.

Exemples

a) $(2x + 3)(x^2 - 5x + 6)$

b) $(x^2y + 2)(x^2y + x - 2)$

c) $(x^2 - y)(x + y - z)$

1.7 Evaluation d'une expression littérale

Evaluer une expression littérale, c'est déterminer la valeur de cette expression en remplaçant chaque variable (chaque lettre) par une valeur donnée.

Exemple
Ainsi, pour $x = 4$, l'expression $7x + 2$ vaut

$$7x + 2 = 7 \cdot 4 + 2 = 28 + 2 = 30$$

et, pour $y = 6$ et $z = 2$, on a

$$\frac{5z}{7y+3} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 6 + 3} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$$

Exemples
Evaluer les expressions suivantes pour les valeurs indiquées des variables

a) pour $x = 2$, $3x + 5$

b) pour $y = 5$, $y^2 + 3$

c) pour $x = 7$ et $y = 9$, $(x + y)(y - x)$

d) pour $x = 4$ et $y = 6$, $\dfrac{y - x}{x + y}$

e) pour $x = 1$ et $y = 9$, $\dfrac{4x + y}{3 - x}$

1.8 Identités remarquables

Certains produits de polynômes facilitent grandement le calcul, on les appelle les identités remarquables.

Identités remarquables du 2ème degré

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A^2+AB+BA+B^2\\ &= A^2+2AB+B^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A-B)^2 &= (A-B)(A-B)\\ &= A^2-AB-BA+B^2\\ &= A^2-2AB+B^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B)(A-B) &= A^2-AB+BA-B^2\\ &= A^2-B^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B+C)^2 &= (A+B+C)(A+B+C)\\ &= A^2+AB+AC+BA+B^2+BC+CA+CB+C^2\\ &= A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC\end{aligned}$$

Identités remarquables du 3ème degré

$$\begin{aligned}(A+B)^3 &= (A+B)(A+B)^2\\ &= (A+B)\left(A^2+2AB+B^2\right)\\ &= A^3+2A^2B+AB^2+BA^2+2AB^2+B^3\\ &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A-B)^3 &= (A-B)(A-B)^2\\ &= (A-B)\left(A^2-2AB+B^2\right)\\ &= A^3-2A^2B+AB^2-BA^2+2AB^2-B^3\\ &= A^3-3A^2B+3AB^2-B^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A+B)\left(A^2-AB+B^2\right) &= A^3-A^2B+AB^2+BA^2-AB^2+B^3\\ &= A^3+B^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A-B)\left(A^2+AB+B^2\right) &= A^3+A^2B+AB^2-BA^2-AB^2-B^3\\ &= A^3-B^3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\
(A-B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\
(A+B)(A-B) &= A^2 - B^2 \\
(A+B+C)^2 &= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC \\
(A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\
(A-B)^3 &= A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \\
(A+B)(A^2 - AB + B^2) &= A^3 + B^3 \\
(A-B)(A^2 + AB + B^2) &= A^3 - B^3
\end{aligned}
$$

Exemples

Effectuer à l'aide des identités remarquables.

a) $(x-5)(x+5)$
b) $(4x-7)(4x+7)$
c) $(x^3+y^2)(x^3-y^2)$
d) $(3xy+2)(3xy-2)$
e) $(x^n+y^m)(x^n-y^m)$
f) $(4x^2yz-7)(7+4x^2yz)$
g) $(x+y+3)^2$
h) $(2x-y-z)^2$
i) $(3x+2y-1)^2$
j) $(x+1)^3$
k) $(2-x)^3$
l) $(2x-1)^3$
m) $(2x-3y)^3$
n) $(x^2-y^3)^3$
o) $(3x^{2n}-y^n)^3$
p) $(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$
q) $(x^2+y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
r) $(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$
s) $(x-3)(x^2+3x+9)$
t) $(x+2)(x^2-2x+4)$
u) $(x^3-y)(x^6+x^3y+y^2)$
v) $[3(x+y)-z]\,[3(x+y)+z]$

1.9 Equations du premier degré

Définition

- Une équation est une égalité entre deux expressions algébriques, appelées membres de l'équation.
- L'équation contient une inconnue, souvent notée x. Suivant la valeur attribuée à l'inconnue, l'équation est vraie ou fausse.
- Les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'équation est vraie sont appelées solutions de l'équation. On dit que ces valeurs, les solutions, vérifient l'équation.
- Enfin, résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions. Cet ensemble est noté S.
- Si l'équation n'a aucune solution, on dit qu'elle est impossible. On écrit alors $S = \emptyset$
- Enfin, si l'équation est vraie pour n'importe quelle valeur de l'inconnue, on dit qu'elle est indéterminée. On écrit alors $S = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire tous les nombres).

Exemples

a) L'équation $3x - 2 = 2x + 1$ admet la solution $x = 3$, car si on remplace x par 3, on obtient $9 - 2 = 6 + 1$. De plus, $x = 3$ est l'unique solution. On écrit $S = \{3\}$.

b) L'équation $2x + 1 = 0$ admet pour unique solution $x = -\dfrac{1}{2}$. On écrit $S = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

c) L'équation $3x - 2 = 5 + 3x$ est impossible : $S = \emptyset$.

d) L'équation $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ est indéterminée, car elle est vraie pour n'importe quelle valeur de x. On écrit donc $S = \mathbb{R}$.

Résolution

Pour résoudre une équation, on peut

a) transformer un membre de l'équation à l'aide du calcul littéral :
l'équation $4(x^2 + 3) - (1 - 2x)^2 - 11 - 3x = (x - 1)(x + 2) - x^2 - x$
devient $4x^2 + 12 - (1 - 4x + 4x^2) - 11 - 3x = (x^2 + x - 2) - x^2 - x$
puis $x = -2$ et donc $S = \{-2\}$;

b) ajouter ou soustraire la même expression aux deux membres de l'équation :
l'équation $3x - 2 = 2x + 3$
devient $3x - 2 - 2x = 2x + 3 - 2x$, c'est-à-dire $x - 2 = 3$ (on a soustrait $2x$)
puis $x - 2 + 2 = 3 + 2$, c'est-à-dire $x = 5$ (on a additionné 2) et donc $S = \{5\}$;

c) multiplier ou diviser les deux membres de l'équation par le même nombre non nul :
l'équation $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{x}{3} + \dfrac{6}{5}$
devient $15\left(\dfrac{3x}{5} - \dfrac{2}{3}\right) = 15\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{6}{5}\right)$
(on a multiplié par 15, le multiple commun des dénominateurs)

puis $9x - 10 = 5x + 18$ (calcul littéral)
et $4x = 28$ (on a soustrait $5x$ et additionné 10)
et enfin $x = 7$ (on a divisé par 4) et donc $S = \{7\}$.

Exemples
Résoudre les équations suivantes.

a) $2 - 3(5x + 8) = x - 2(3 - 4x)$

b) $(x + 3)(x + 4) = x^2 - 3x + 4$

c) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{7x}{3} - \dfrac{x - 3}{2} = 4x + \dfrac{3}{2}$

1.10 Inéquations du premier degré

Définition Une inéquation est une inégalité entre deux expressions algébriques. Cette inégalité peut être de quatre types

$>$ plus grand que	$\geqslant$ plus grand ou égal à
$<$ plus petit que	$\leqslant$ plus petit ou égal à

Comme les équations, les inéquations

a) comprennent deux membres,
b) contiennent une inconnue,
c) peuvent être vraies ou fausses, suivant la valeur attribuée à l'inconnue,
d) peuvent avoir des solutions, être impossibles ou indéterminées.

Enfin, résoudre une inéquation, c'est déterminer l'ensemble de toutes ses solutions. Cet ensemble est également noté S.

Exemples

a) L'inéquation $3x - 6 > 0$ admet pour solution tous les nombres x tels que $x > 2$. On écrit donc $S =]2; +\infty[$.

b) L'inéquation $x + 2 < x + 4$ admet pour solution tous les nombres. Elle est donc indéterminée et on écrit $S = \mathbb{R}$.

c) L'inéquation $3 + 2x \leqslant 2x - 1$ n'admet aucune solution. Elles est donc impossible et on écrit $S = \emptyset$.

Résolution
Pour résoudre une inéquation, on peut

a) utiliser le calcul littéral
b) ajouter ou soustraire la même expression aux deux membres de l'inéquation
c) multiplier ou diviser les deux membres de l'inéquation par le même nombre **strictement positif**

Remarque
Si l'on veut multiplier les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif, il faut alors changer le sens de l'inégalité.
En effet, l'inéquation $-x < 16$ devient $0 - x + (x - 16) < 16 + (x - 16)$ et donc $-16 < x$ (on a additionné $x - 16$) et enfin $x > 16$ (en permutant les deux membres et en changeant donc le sens de l'inégalité).
On obtient le même résultat en multipliant l'inéquation de départ $-x < 16$ par -1, mais il faut bien changer le sens de l'inégalité.

Exemples Résoudre les inéquations suivantes.

a) $2(x+4) > 3(x-1)$

b) $\dfrac{5x}{3} - \dfrac{x-1}{2} \geqslant x + \dfrac{1}{4}$

c) $(3x-2)(x+3) < 3(x^2+4x-2)$

Exercices

Exercice 1.1

Effectuer

a) $6 + 18 + 4$
b) $16 \cdot 17 + 16 \cdot 13$
c) $9 \cdot 2 + 8 \cdot 7 - 3 \cdot 6$
d) $8 \cdot 7 + 24 : 3 + 36 : 9$
e) $5 \cdot 8 : 4 : 5 + 2$
f) $(7 + 3) \cdot 8 - 4 \cdot (22 - 14)$
g) $3 \cdot (50 - (30 - (20 - 10)))$
h) $(4 \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot (7 - 5)) : 5 - 3$

Exercice 1.2

Effectuer et simplifier

a) $\dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{2}{8}$
b) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{4}$
c) $\dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{6}{8}$
d) $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{7}$
e) $\dfrac{1}{2} : \dfrac{1}{4}$
f) $\frac{\frac{1}{7}}{\frac{1}{8}}$
g) $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{8}}$
h) $\frac{\frac{11}{2}}{\frac{7}{3}}$

Exercice 1.3

Effectuer et simplifier

a) $\dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{8}$
b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}$
c) $\dfrac{5}{6} - \dfrac{6}{8}$
d) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{5}{7}$
e) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}$
f) $\dfrac{1}{7} + \dfrac{2}{9}$
g) $\dfrac{3}{5} - \dfrac{7}{8}$
h) $\dfrac{11}{2} + \dfrac{7}{3}$

Exercice 1.4

Effectuer et simplifier

a) $\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}$

c) $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{9}\right)$

d) $\frac{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}+1}$

e) $\frac{\frac{7}{6}-\frac{5}{9}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}$

f) $\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}{2-\frac{4}{7}}$

g) $\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}-\frac{5}{9}}$

h) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{6}{5}\right)-\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{3}{2}$

Exercice 1.5

Simplifier

a) $3^5\cdot4^5$

b) $\frac{16^7}{2^7}$

c) $5^{14}\cdot5^3$

d) $\left(2^7\right)^3$

e) $\frac{3^{12}}{3^8}$

f) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{2^4}}$

g) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$

h) $\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^2}{\frac{1}{56}}$

Exercice 1.6

Écrire en notation scientifique

a) 1000000

b) 3200

c) $0,0032$

d) 1 milliard

e) $\frac{1}{100}$

f) $\frac{1}{2}$

g) $\frac{1}{200}$

h) $345,67$

Exercice 1.7

Simplifier

a) $\frac{10^3}{10^5}$

b) $\frac{3\cdot10^3}{2\cdot10^5}$

c) $\frac{7}{2}\cdot\frac{10^6}{10^4}$

d) $\frac{10^2}{10^{-7}}$

e) $\frac{10^{-3}}{10^{-2}}+\frac{1}{10^2}$

f) $\frac{\frac{10^5}{10^6}}{\frac{10^{99}}{10^{98}}}$

g) $\frac{(10^4)^9}{(10^7)^5}$

h) $3^2\cdot10^4+5^2\cdot10^3$

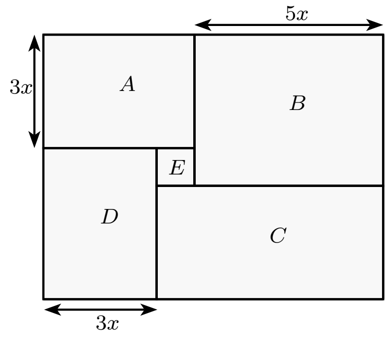
Exercice 1.8

Les rectangles A et D ont la même aire et E est un carré de côté x. Exprimer, en fonction de x :

a) le périmètre de chacune des surfaces A, B, C, D et E ;

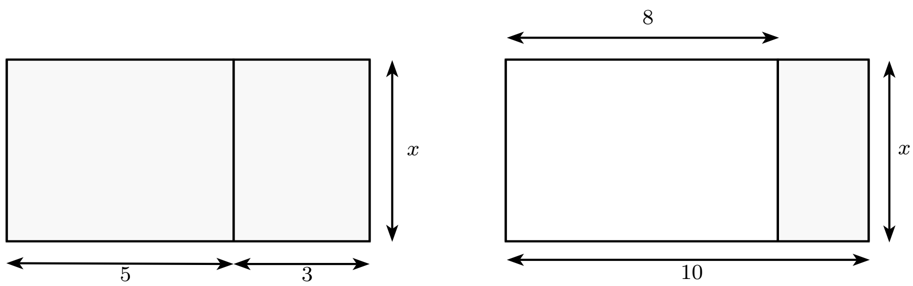
b) l'aire de chacune des surfaces A, B, C, D et E ;

c) l'aire totale du rectangle extérieur



Exercice 1.9

Exprimer, en fonction de x et de deux manières différentes, l'aire des rectangles colorés.



Exercice 1.10

Traduire chacune des phrases ci-dessous par une expression littérale :

a) Je choisis un nombre a, je le multiplie par 2, puis j'ajoute 3 au résultat.

b) Je choisis un nombre a, je lui ajoute 3, puis je multiplie le résultat par 2.

c) Je choisis un nombre a, je lui ajoute le produit de 2 par 3.

d) Je choisis un nombre a, je lui enlève 3, puis je multiplie le résultat par 2.

e) Je choisis un nombre a, je l'élève au carré, puis j'ajoute 3 au résultat.

f) Je choisis un nombre a, je le multiplie par 3, puis j'enlève 2 au résultat.

g) Je choisis un nombre a, je lui enlève 2, puis je multiplie le résultat par 3.

h) Je choisis un nombre a, je lui enlève 2, puis j'élève le résultat au cube.

Exercice 1.11

Réduire

a) $a(ab)$
b) $(2\,x\,y)\cdot(3\,x\,y)$
c) $5\,z\cdot 2\,z$
d) $-2\,v\cdot 5\,v$
e) $(3\,a)\cdot(4\,a)\cdot(5\,a)$
f) $4\,a\cdot b\cdot(-b)$
g) $6\,m\cdot 6\,m\cdot n$
h) $\dfrac{c}{2}\cdot 20\,c$
i) $5\,x\cdot x\cdot 10\,x$
j) $-y\cdot y\cdot(-y)$
k) $(-1)\cdot x\cdot(-y)$
l) $(-r)\cdot(-t)\cdot(-4)$

Exercice 1.12

Réduire et ordonner les polynômes suivants puis indiquer leur degré :

a) $3\,x^2+5\,x+x^2+5-3\,x$
b) $3\,z+z^5-z+2\,z^3+4\,z^5+z^2$
c) $-2\,x+2\,x^4-2^4$
d) $4\,x^2+6\,x-2\,x^2-5\,x$
e) $4\,x+5\,y-2\,x+3$
f) $7\,z^2-3\,x+5,5\,z^2-2\,x+2$
g) $x^3-3\,x^3+2\,x^3$
h) $u^4-u^3+u^2-u+u^2-u^3+u^4$

Exercice 1.13

Quel polynôme faut-il ajouter à $10\,x$ pour obtenir $12\,x+4$?
Même question :

	à partir de ...	pour obtenir ...
a)	$x+1$	$x-1$
b)	$3\,y-5$	$y+2$
c)	x^3+x	x
d)	$x+y$	$4\,x$
e)	$y^3+2\,y^2$	y^3-y+1
f)	$3\,x^2-5\,x+2$	$-3\,x^2+5\,x-2$
g)	$-2\,z+3$	$z^2+5\,z$
h)	$-3\,m+5\,n$	$-5\,m+3$

Exercice 1.14

Effectuer et réduire les expressions suivantes :

a) $(x^2+x+1)+(3\,x^2-8\,x+7)$
b) $(x^2+y\,z^3-x)+(2\,x+2\,y\,z^3)$
c) $5\,x-(3\,x^2+12)$
d) $(8\,x+3\,y-z)-(5\,x+3\,y+z)$
e) $18\,x-[7\,x-(8\,x-y)]$
f) $(6\,x+5\,y)+(4\,x+y-3\,z)-(2\,z+5\,x-3\,y)$
g) $-[(1+x+x^2)-(2\,x-4\,x^2)]$

h) $25\,x - \{13\,x - [24\,x - (5\,x + 3\,y) - (7\,x - y)] + (24\,x - 2\,y)\}$

Exercice 1.15

Effectuer et réduire les expressions suivantes :

a) $4\,(x + 1)$

b) $(-x + 8) \cdot (-10)$

c) $(2\,x + 5) \cdot (3\,x - 7)$

d) $(4\,x - 3\,y) \cdot (x - 5\,y)$

e) $(2\,u + 3) \cdot (u - 4) + 4\,u \cdot (u + 1)$

f) $(3\,x + 5)^2 \cdot (2\,x^2 + 9\,x - 5)$

g) $7(a^2 - 5) \cdot (3\,a^2 - a + 2) \cdot (a - 1)$

h) $(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

i) $(2\,z + 1)^4$

Exercice 1.16

Les expressions suivantes sont-elles des sommes ou des produits ?

a) $5\,x\,(2x + 3)$

b) $3\,y + 9$

c) $(5\,z + 2)^2$

d) $12\,x^2 + 8\,x + 4$

e) $(7\,a + 5)(6\,b + 4)$

f) $(3\,f + 5)(2\,f + 6) + (2\,f + 4)(3\,f + 8)$

Exercice 1.17

Évaluer les expressions suivantes dans les valeurs indiquées.

a) $3\,x - 4$ en $x = 2$

b) $x^2 + 3$ en $x = -4$

c) $-x^2 - 1$ en $x = 2$

d) $-x + 1$ en $x = \dfrac{1}{2}$

e) $8\,x + 5$ en $x = 0$

f) $\dfrac{1 + x}{1 - x}$ en $x = \dfrac{1}{2}$

g) $x^2 + 2\,x + 1$ en $x = -2$

h) $8\,x^2 + 7\,x + 6$ en $x = -1$

Exercice 1.18

Développer et réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

a) $(x+2)^2$

b) $(x+3)(x-3)$

c) $(2\,a-3\,b)^2$

d) $(x\,y+1)^2$

e) $\left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{2b}{3}\right)\left(\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{2\,b}{3}\right)$

f) $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2$

g) $(3\,a^2x^3\,b+2\,a\,x^2\,b^3)^2$

h) $((x-y)\,(x+y))^2$

i) $(-u-3w)^2$

j) $\left(\dfrac{2\,a}{5}+\dfrac{b^2}{4}\right)^2$

k) $(a-b)^2-(b-a)^2$

l) $(x^3+x)^2-(x^2+1)^2$

m) $(2\,a-3\,b)(4\,a^2+9\,b^2)(2\,a+3\,b)$

n) $(a-2\,c)(2\,c+a)(a^2-4\,c^2)$

o) $(4\,z-2)^3$

Exercice 1.19

Compléter les identités remarquables suivantes :

a) $(2\,y-\ldots)^2=\ldots-\ldots+81$

b) $\left(\ldots+\dfrac{2}{5}\right)(a-\ldots)=\ldots-\ldots$

c) $(\ldots+\ldots)^2=\ldots+z+\dfrac{1}{4}$

d) $(3\,x+\ldots)^2=\ldots+\ldots+\dfrac{1}{9}$

e) $(\ldots-2\,y)^2=z^2-\ldots+\ldots$

f) $(\ldots-7)^2=9\,t^2-\ldots+\ldots$

g) $(t-\ldots)^2=\ldots-5\,t+\ldots$

h) $(\ldots+\ldots)(\ldots-\ldots)=x^2-3$

Exercice 1.20

Montrer l'égalité suivante

a) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

Exercice 1.21

Résoudre les équations suivantes, sans oublier de vérifier chaque réponse !

a) $x+3=8$

b) $x-2=9$

c) $4=x-1$

d) $13=x+3$

e) $4\,x+3=51$

f) $6\,x-21=3$

g) $27=4\,x-9$

h) $3\,x+5=2\,x+9$

i) $5\,x-3=4\,x+8$

j) $7\,x-9=6\,x-3$

Exercice 1.22

Résoudre les équations suivantes, sans oublier de vérifier chaque réponse !

a) $80 - 5\,x = 20 + x - 12$

b) $8\,x - 5 = 7\,x - 2,75 - 2\,x$

c) $0 = 9 - 6\,x - 19 + 10\,x$

d) $0,5\,x - 6,3 = 3,7\,x - 9,5$

e) $4,3\,x - 3,9 = 2,4\,x + 5,6$

f) $8,3 - 3\,x = 2,1 + 7,2\,x + 6,2$

g) $10\,x - 2,05 = 4,9\,x + 1,75 - 2,5\,x$

h) $0,2x - 0,089\,x + 1,78 = x - 16$

Exercice 1.23

Résoudre les équations suivantes, sans oublier de vérifier chaque réponse !

a) $2\,x + 7 - 16\,x = 8 + 6\,x + 39$

b) $3\,x - 15 - 4\,x = -9 + x - 13$

c) $15\,x - 73 - 24\,x = 59 - 16 + 20\,x$

d) $5\,x - 3 = 4\,x - 3 + 7$

e) $5 - x = 3 - 2\,x + 5$

f) $9\,x - 11 - 3\,x = 4x + 12 - 3\,x$

g) $15 - 4\,x - 2 = 3 - 4\,x + 1 + x$

h) $19\,x - 32 + 17\,x = 18\,x - 30 + 16\,x - 4$

Exercice 1.24

Résoudre les équations suivantes, sans oublier de vérifier chaque réponse !

a) $\dfrac{x}{0,1} = 10$

b) $\dfrac{x}{0,01} = 10$

c) $\dfrac{x}{0,001} = 10$

d) $\dfrac{x}{15} - 3 = \dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{12}$

f) $1 = \dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{8}$

g) $14 = \dfrac{14\,x}{9} - \dfrac{7\,x}{18}$

h) $1 - \dfrac{2\,x}{5} = \dfrac{11}{9}$

i) $15 - \dfrac{x}{3} = \dfrac{5}{3}$

j) $\dfrac{11}{4} + \dfrac{x}{3} = 1$

Exercice 1.25

Résoudre les équations suivantes, sans oublier de vérifier chaque réponse !

a) $1 + \dfrac{9}{x} = \dfrac{75}{x}$

b) $4 = \dfrac{5}{x} + 3$

c) $14 = \dfrac{25}{x} - 11$

d) $8 + \dfrac{1}{x} = \dfrac{9}{x}$

e) $4 - \dfrac{9}{x} = 3 + \dfrac{2}{x}$

f) $12 + \dfrac{6}{x} = 11 - \dfrac{3}{x}$

g) $\dfrac{5}{x} - 4 = \dfrac{9}{x} - 5$

h) $\dfrac{7}{x} - 1 = \dfrac{29}{x}$

Exercice 1.26

Résoudre les équations suivantes, sans oublier de vérifier chaque réponse !

a) $\dfrac{x+3}{x-5} = 3$

b) $\dfrac{x+3}{x-5} = 1$

c) $\dfrac{x-4}{x+2} = \dfrac{3}{4}$

d) $\dfrac{2\,x+8}{3\,x-2} = \dfrac{1}{2}$

e) $\dfrac{x-7}{2\,x-5} + 8 = \dfrac{4}{5}$

f) $\dfrac{3\,x-4}{2\,x+7} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{4}{7}$

Exercice 1.27

Résoudre les inéquations, donner la solution en notation par intervalle :

a) $x - 7 > -3\,x + 1$

b) $3 - 2\,x > 3\,x - 5$

c) $2\,x - 3 + x + 4 \leq x + 2$

d) $3 - 4\,x < x - 3$

e) $2\,x - 3 - x + 4 \leq x + 2$

f) $3 - 2\,x \geq 2$

g) $x + 9 + 1 - 2\,x < 4 + 5 - 3\,x$

h) $3\,x - 2 \leq 2\,x - 8$

i) $x + 9 - 1 - 2\,x < 4 - 5 - 3\,x$

Exercice 1.28

Sans résoudre, dire si le nombre 4 est une solution de l'inéquation $3\,x - 2 \leq 7$ et justifier.

Exercice 1.29

Sans résoudre, dire si le nombre 1 est une solution de l'inéquation $2\,x + x \leq 5\,x$ et justifier.

Exercice 1.30

Sans résoudre, dire si le nombre -1 est une solution de l'inéquation $2\,x + x \leq 5\,x$ et justifier.

Solutions

Solution 1.1

a) 28
b) 480
c) 56
d) 68
e) 4
f) 48
g) 90
h) 9

Solution 1.2

a) $\frac{1}{28}$
b) $\frac{1}{8}$
c) $\frac{5}{8}$
d) $\frac{15}{28}$
e) 2
f) $\frac{8}{7}$
g) $\frac{24}{35}$
h) $\frac{33}{14}$

Solution 1.3

a) $\frac{11}{28}$
b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{1}{12}$
d) $\frac{1}{28}$
e) $\frac{1}{4}$
f) $\frac{23}{63}$
g) $-\frac{11}{40}$
h) $\frac{47}{6}$

Solution 1.4

a) $-\frac{9}{70}$
b) $\frac{33}{70}$
c) $\frac{1}{24}$
d) $\frac{175}{144}$
e) $\frac{22}{21}$
f) $\frac{77}{300}$
g) $-\frac{18}{17}$
h) $\frac{17}{84}$

Solution 1.5

a) 12^5
b) 8^7
c) 5^{17}
d) 2^{21}
e) 3^4
f) 1
g) $\dfrac{1}{2}$
h) $\dfrac{1}{56}$

Solution 1.6

a) $1 \cdot 10^6$
b) $3,2 \cdot 10^3$
c) $3,2 \cdot 10^{-3}$
d) $1 \cdot 10^9$
e) $1 \cdot 10^{-2}$
f) $5 \cdot 10^{-1}$
g) $5 \cdot 10^{-3}$
h) $3,4567 \cdot 10^2$

Solution 1.7

a) $\frac{1}{100}$
b) $\frac{3}{200}$
c) 350
d) 1000000000
e) $\frac{11}{100}$
f) $\frac{1}{100}$
g) 10
h) 115000

Solution 1.8

a) $P_A = 14\,x,\ P_B = 18\,x,\ P_C = 18\,x,\ P_D = 14\,x,\ P_E = 4\,x$
b) $A_A = 12\,x^2,\ A_B = 20\,x^2,\ A_C = 18\,x^2,\ A_D = 12\,x^2,\ A_E = x^2$
c) $63\,x^2$

Solution 1.9

a) $5\,x + 3\,x$ ou $8\,x$
b) $10\,x - 8\,x$ ou $2\,x$

Solution 1.10

a) $2\,a + 3$
b) $(a + 3) \cdot 2$
c) $a + 2 \cdot 3$
d) $(a - 3) \cdot 2$
e) $a^2 + 3$
f) $3\,a - 2$
g) $(a - 2) \cdot 3$
h) $(a - 2)^3$

Solution 1.11

a) $a^2\,b$
b) $6\,x^2\,y^2$
c) $10\,z^2$
d) $-10\,v^2$
e) $60\,a^3$
f) $-4\,a\,b^2$
g) $36\,m^2\,n$
h) $10\,c^2$
i) $50\,x^3$
j) y^3
k) $x\,y$
l) $-4\,r\,t$

Solution 1.12

a) $4\,x^2 + 2\,x + 5$, degré 2
b) $5\,z^5 + 2\,z^3 + z^2 + 2\,z$, degré 5
c) $2\,x^4 - 2\,x - 16$, degré 4
d) $2\,x^2 + x$, degré 2
e) $2\,x + 5\,y + 3$, degré 1
f) $12,5\,z^2 - 5\,x + 2$, degré 2
g) 0, degré indéterminé
h) $2\,u^4 - 2\,u^3 + 2\,u^2 - u$, degré 4

Solution 1.13

a) -2
b) $-2\,y + 7$
c) $-x^3$
d) $3\,x - y$
e) $-2\,y^2 - y + 1$
f) $-6\,x^2 + 10\,x - 4$
g) $z^2 + 7\,z - 3$
h) $-2\,m - 5\,n + 3$

Solution 1.14

a) $4\,x^2 - 7\,x + 8$
b) $x^2 + x + 3\,y\,z^3$
c) $-3\,x^2 + 5\,x - 12$
d) $3\,x - 2\,z$
e) $19\,x - y$
f) $5\,x + 9\,y - 5\,z$
g) $-5\,x^2 + x - 1$
h) 0

Solution 1.15

a) $4\,x+4$
b) $10\,x-80$
c) $6\,x^2+x-35$
d) $4\,x^2-23\,x\,y+15\,y^2$
e) $6\,u^2-u-12$
f) $18\,x^4+141\,x^3+275\,x^2+75\,x-125$
g) $21\,a^5-28\,a^4-84\,a^3+126\,a^2-105\,a+70$
h) $x^3+4\,x^2+x-6$
i) $16\,z^4+32\,z^3+24\,z^2+8\,z+1$

Solution 1.16

a) produit
b) somme
c) produit
d) somme
e) produit
f) somme

Solution 1.17

a) 2
b) 19
c) -5
d) $\frac{1}{2}$
e) 5
f) 3
g) 1
h) 7

Solution 1.18

a) $x^2+4\,x+4$
b) x^2-9
c) $4\,a^2-12\,a\,b+9\,b^2$
d) $x^2\,y^2+2\,x\,y+1$
e) $\frac{a^4}{4}-\frac{4\,b^2}{9}$
f) $a^2-a\,b+\frac{b^2}{4}$
g) $9\,a^4\,b^2\,x^6+12\,a^3\,b^4\,x^5+4\,a^2\,b^6\,x^4$
h) $x^4-2\,x^2\,y^2+y^4$
i) $u^2+6\,u\,w+9\,w^2$
j) $\frac{4\,a^2}{25}+\frac{a\,b^2}{5}+\frac{b^4}{16}$
k) 0
l) $x^6+x^4-x^2-1$
m) $16\,a^4-81\,b^4$
n) $a^4-8\,a^2c^2+16\,c^4$

o) $64\,z^3 - 96\,z^2 + 48\,z - 8$

Solution 1.19

a) $(2\,y-9)^2 = 4\,y^2 - 36\,y + 81$
b) $\left(a+\frac{2}{5}\right)\left(a-\frac{2}{5}\right) = a^2 - \frac{4}{25}$
c) $(z+\frac{1}{2})^2 = z^2 + z + \frac{1}{4}$
d) $(3\,x+\frac{1}{3})^2 = 9\,x^2 + 2\,x + \dfrac{1}{9}$
e) $(z-2\,y)^2 = z^2 - 4\,y\,z + 4\,y^2$
f) $(3\,t-7)^2 = 9\,t^2 - 42\,t + 49$
g) $(t-\frac{5}{2})^2 = t^2 - 5\,t + \frac{25}{4}$
h) $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = x^2 - 3$

Solution 1.20
Il faut développer puis réduire le membre de gauche.

Solution 1.21

a) $S = \{5\}$
b) $S = \{11\}$
c) $S = \{5\}$
d) $S = \{10\}$
e) $S = \{12\}$
f) $S = \{4\}$
g) $S = \{9\}$
h) $S = \{4\}$
i) $S = \{11\}$
j) $S = \{6\}$

Solution 1.22

a) $S = \{12\}$
b) $S = \{0,75\}$
c) $S = \{2,5\}$
d) $S = \{1\}$
e) $S = \{5\}$
f) $S = \{0\}$
g) $S = \{0,5\}$
h) $S = \{20\}$

Solution 1.23

a) $S = \{-2\}$
b) $S = \{\frac{7}{2} = 3,5\}$
c) $S = \{-4\}$
d) $S = \{7\}$
e) $S = \{3\}$
f) $S = \{\frac{23}{5} = 4,6\}$
g) $S = \{11\}$
h) $S = \{-1\}$

Solution 1.24

a) $S = \{1\}$
b) $S = \{0,1\}$
c) $S = \{0,01\}$
d) $S = \{\frac{105}{2} = 52,5\}$
e) $S = \{1\}$
f) $S = \{8\}$
g) $S = \{12\}$
h) $S = \{-\frac{5}{9}\}$
i) $S = \{40\}$
j) $S = \{-\frac{21}{4}\}$

Solution 1.25

a) $S = \{66\}$
b) $S = \{5\}$
c) $S = \{1\}$
d) $S = \{1\}$
e) $S = \{11\}$
f) $S = \{-9\}$
g) $S = \{4\}$
h) $S = \{-22\}$

Solution 1.26

a) $S = \{9\}$
b) $S = \emptyset$
c) $S = \{22\}$
d) $S = \{-18\}$
e) $S = \{\frac{215}{77}\}$
f) $S = \{\frac{259}{16}\}$

Solution 1.27

a) $S =]2;\infty[$
b) $S = \left]-\infty;\frac{8}{5}\right[=]-\infty;1,6[$
c) $S = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$
d) $S = \left]\frac{6}{5};\infty\right[=]1,2;\infty[$
e) $S = \emptyset$
f) $S = \left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$
g) $S = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$
h) $S = [-\infty;-6]$
i) $S = \left]-\infty;-\frac{9}{2}\right[$

Solution 1.28
Non, 4 n'est pas solution de l'inéquation. Il suffit d'évaluer le membre de gauche pour le savoir.

Solution 1.29
Oui, 1 est solution de l'inéquation. Il suffit d'évaluer le membre de gauche pour le savoir.

Solution 1.30
Non, -1 n'est pas solution de l'inéquation. Il suffit d'évaluer le membre de gauche pour le savoir.

2 Proportionnalité

2.1 Rapports

Définition
Le **rapport de deux nombres** a **et** b, pris dans l'ordre, est le quotient de a par b.
Il se note $\dfrac{a}{b}$.

Deux grandeurs x et y sont **proportionnelles** si leur quotient est constant : $\dfrac{y}{x} = k$ (où k est une constante), ce qui est équivalent à $y = k\,x$. Le nombre k est appelé le **rapport de proportionnalité**.

Exemples

a) Le côté x et le périmètre y d'un carré sont deux grandeurs proportionnelles. Représentons ces deux valeurs dans un tableau :

Côté du carré x	1	2	3	4	5	6
Périmètre du carré y	4	8				
Rapport entre y et x	$\frac{4}{1} = 4$	$\frac{8}{2} = 4$				

On remarque que $\dfrac{y}{x} = 4$ ou encore que $y = 4\,x$. Le rapport de proportionnalité est donc égal à 4.

b) Si x représente le côté d'un carré et y son aire, alors :

Côté du carré x	1	2	3	4	5	6
Aire du carré y	1					
Rapport entre y et x	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{}{2} =$				

Par conséquent,

2.2 Proportions

Définition
Si a, b, c et d sont des nombres réels, avec $b, d \neq 0$, on appelle **proportion** l'égalité des deux rapports : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Dans toute proportion, la propriété suivante est vérifiée :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

Cette propriété est souvent utilisée pour chercher un des quatre termes d'une proportion lorsque les trois autres sont donnés. Elle est appelée **règle de trois**.

Exemples

a) Un automobiliste a payé 3 litres d'huile 22,50 fr. Combien déboursera-t-il pour 5 litres ?

Le prix payé est proportionnel à la quantité d'huile. Ainsi, si x représente le prix pour 5 litres, les nombres $a = 22{,}50$ fr, $b = 3$ litres, x et $d = 5$ litres forment une proportion :

$$\frac{22{,}50}{3} = \frac{x}{5}$$

donc $x = \dfrac{22{,}5 \cdot 5}{3} = 37{,}50$ fr. On peut également utiliser un tableau :

Nombre de litres d'huile	3	5
Prix payé	22,50	x

donc $x =$ ________

b) Pour confectionner une crème pour 6 personnes, les quantités indiquées sont les suivantes : 4 oeufs, 9 dl de lait, 150 g de sucre et 30 g de farine.
Calculer les quantités nécessaires pour 10 personnes :

Personnes	Oeufs	Lait	Sucre	Farine
6	4	9	150	30
10				

2.3 Applications

2.3.1 Pourcentage

Un rapport est souvent donné en **pourcent**, ce qui correspond à une fraction dont le dénominateur vaut 100 et qui se note avec le symbole %. Par exemple,

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$70\% = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Exemples

a) Lors d'un match de basket, un joueur de Fribourg Olympic a réussi 12 paniers sur 17 tirs tentés. Quel est le pourcentage de réussite ?

   Il faut calculer $\frac{12}{17} \cong 0{,}705\,9 = \frac{70{,}59}{100} = 70{,}59\,\%$.

b) Dans une boutique, une veste coûte 110 fr. Le jour des soldes, son prix est diminué de 10%. Quelle est le nouveau prix de la veste ?

   Si le prix soldé de cette veste est ensuite ré-augmenté de 10%, combien coûtera-t-elle ? Que peut-on en déduire ?

2.3.2 Taux de change

Le **taux de change** d'une devise est le cours de cette devise par rapport à une autre. Par exemple, dans le tableau suivant, les valeurs indiquées correspondent au prix en francs suisses CHF de 1 ou 100 unités de la monnaie étrangère :

1 Euro (€)	1,09
1 Dollar US ($)	0,97
1 Livre Sterling (£)	1,40
1 Dollar Canadien ($)	0,74
100 Yens (¥)	0,87

Il s'agit d'un taux moyen (mars 2016), sans distinction de l'achat ou de la vente des devises.

Exemples

a) Un ordinateur portable coûte €453. Quel est son prix en franc suisse ?

Utilisons le tableau suivant, où x est le prix de l'ordinateur en francs suisses :

€1	1,09 CHF
€453	x

donc $x = \dfrac{1{,}09 \cdot 453}{1} = 493{,}77\,\text{CHF}$.

b) Le taux de change ci-dessus est celui indiqué par la succursale d'une grande banque en Suisse.
En passant devant la vitrine d'une succursale parisienne, le taux de change indiqué pour les dollars US est le suivant :

1 Dollar US ($)	0,89

Qu'en pensez-vous ?

2.3.3 Échelle

L'**échelle** est le rapport de la distance mesurée sur un plan, par le distance réelle mesurée, exprimées dans la même unité :

$$\text{échelle} = \frac{\text{dimension sur le plan}}{\text{dimension réelle}}$$

L'échelle s'écrit sous la forme d'une fraction dont le numérateur ou le dénominateur vaut 1. La barre de fraction est remplacée par deux points.

Dans le cas d'une **réduction**, on note, par exemple **1 : 4** si les dimensions sur le plan sont 4 fois plus **petites** que celles mesurées dans la réalité.

Dans le cas d'un **agrandissement**, on note, par exemple **4 : 1** si les dimensions sur le plan sont 4 fois plus **grandes** que celles mesurées dans la réalité.

Exemples

a) Il y a 403 km à vol d'oiseau entre les aéroports de Genève et de Paris. Quelle est la mesure de cette distance sur une carte à l'échelle 1: 500 000 ?

   Utilisons le tableau suivant, où x est la mesure de la distance sur la carte :

500 000	403 km
1	x

   donc $x = \dfrac{403 \cdot 1}{500\ 000} = 0{,}000\ 806\,\text{km} = 80{,}6\,\text{m}.$

b) On a mesuré 28 cm sur la carte 1: 25 000 entre le port de Nyon et le port d'Yvoire. Quelle est la distance parcourue par le bateau qui assure la liaison entre ces deux localités ?

2.3.4 Pente

La **pente** est le rapport de la dénivellation par la distance horizontale :

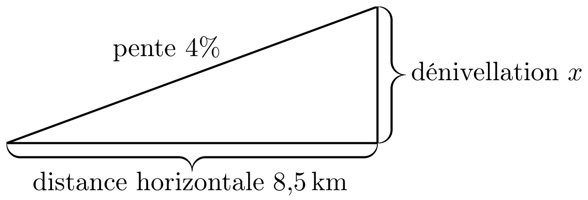
$$\text{pente} = \frac{\text{dénivellation}}{\text{distance horizontale}}$$

Elle s'exprime généralement en %.

Exemples

a) La pente moyenne d'une voie ferrée est de 4%. Quelle est la dénivellation pour une distance horizontale de 8,5 km ?

Appelons x la dénivellation :



Par conséquent $\dfrac{x}{8{,}5} = 4\% = \dfrac{4}{100}$, ainsi $x = \dfrac{4 \cdot 8{,}5}{100} = 0{,}34\,\text{km} = 340\,\text{m}$.

b) Quelle est la longueur de l'ombre d'un poteau vertical de 4,5 m si la pente des rayons du soleil est de 90% ?

2.3.5 Masse volumique

La **masse volumique** d'une matière est la masse de cette matière pour un volume donné :

$$\text{masse volumique} = \frac{\text{masse}}{\text{volume}}$$

Elle s'exprime généralement en kg/m^3 ou en kg/dm^3. Par exemple

liège	0,25 kg/dm^3	fer	7,8 kg/dm^3
mazout	0,92 kg/dm^3	argent	10,5 kg/dm^3
eau	1 kg/dm^3	plomb	11,3 kg/dm^3
sable	1,4 kg/dm^3	mercure	13,6 kg/dm^3
aluminium	2,7 kg/dm^3	or	18,9 kg/dm^3

Exemples

a) Déterminer la masse volumique du marbre sachant qu'une plaque de $153,6$ cm^3 a une masse de $414,72$ g.

   Pour déterminer la masse volumique, il faut diviser la masse de la plaque, qui vaut $414,72 \text{ g} = 0,41472 \text{ kg}$ par son volume, qui vaut $153,6 \text{ cm}^3 = 0,1536 \text{ dm}^3$.

   Cela nous donne une masse volumique égale à $\dfrac{0,1536}{0,41472} = 2,7 \text{ kg/dm}^3$.

   En particulier, on remarque que $\dfrac{1 \text{ kg}}{1 \text{ dm}^3} = \dfrac{1000 \text{ g}}{1000 \text{ cm}^3} = \dfrac{1 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3}$.

b) Déterminer la masse d'une vitre de 1 mètre de long, 50 cm de large et 4 mm d'épaisseur, sachant que la masse volumique du verre est de $2,5$ kg/dm^3.

2.3.6 Vitesse

La **vitesse** est le rapport de la distance parcourue par le temps mis pour la parcourir :

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$$

Elle s'exprime en km/h ou en m/s.

Exemples

a) Lors du grand prix de Monaco en 2007, Fernando Alonso a établi le record du tour en 1 min 15 s 284. Déterminer sa vitesse moyenne en km/h, sachant que la longueur du circuit est de $3,34$ km.

   Pour que la vitesse soit exprimée en km/h, il faut transformer le temps de parcours en heure : 1 min 15 s 284 correspond à $60 + 15 + \dfrac{284}{1000} = 75,284$ secondes.
   Comme 1 heure correspond à $60 \cdot 60 = 3600$ secondes, $75,284$ secondes correspondent à $\dfrac{75,284}{3600} \cong 0,020912$ heure par une règle de trois.
   La vitesse cherchée est donc $v = \dfrac{3,34}{0,020912} \cong 159,7$ km/h.

b) Quelle est la distance totale parcourue par Nelson Piquet durant le grand prix du Brésil sachant qu'il a roulé durant 1 h 39 min 32 s à la vitesse moyenne de $184,98$ km/h ?

2.3.7 Débit

Le **débit** est le rapport du volume d'eau qui s'écoule par unité de temps :

$$\text{débit} = \frac{\text{volume}}{\text{temps}}$$

Il s'exprime généralement en m^3/s. Rappelons que 1 litre $= 1\ \text{dm}^3 = 0,001\ \text{m}^3$.

Exemples

a) Dans les chutes du Rhin, le débit de l'eau est en moyenne de $356\ \text{m}^3$ par seconde. Quelle est la quantité d'eau qui s'écoule pendant une demi-heure ?

   Une demi-heure correspond à $30 \cdot 60 = 1800$ secondes. Comme $356\ \text{m}^3$ s'écoulent en 1 seconde, alors $356 \cdot 1800 = 640'800\ \text{m}^3$ s'écoulent en une demi-heure.

   Comme $1\ \text{m}^3$ correspond à $1000\ \text{dm}^3$, donc à 1000 litres, il y a $640'800'000$ litres d'eau qui s'écoulent en une demi-heure.

b) Déterminer le débit d'une source en l/min, sachant qu'il a fallu $12,5$ secondes pour remplir un seau de 10 litres.

2.3.8 Titre

Pour confectionner des objets en argent ou en or, on mélange ce métal précieux avec un autre métal (nickel, cuivre, etc...). On obtient ainsi un alliage donc on indique le **titre**, qui est défini par

$$\frac{\text{titre}}{1000} = \frac{\text{masse de métal fin}}{\text{masse de l'alliage}}$$

Exemples

a) Une cuillère en argent a une masse de $42,5$ gramme et un titre de 800.
Déterminer la quantité d'argent pur qu'elle contient ; ainsi que le titre de cette cuillère si, pour une même masse, on avait utilisé $25,5$ grammes d'argent pur.

Appelons x la quantité d'argent pur contenu dans cette cuillère. Alors $\dfrac{800}{1000} = \dfrac{x}{42,5}$, donc $x = \dfrac{42,5 \cdot 800}{1000} = 34$ grammes.

Appelons ensuite t le titre d'une cuillère de $42,5$ gramme contenant 25.5 grammes d'argent pur.

Alors $\dfrac{t}{1000} = \dfrac{25,5}{42,5}$, donc $t = \dfrac{25,5 \cdot 1000}{42,5} = 600$.

b) Un bijoutier dispose de 450 g d'argent pur pour préparer un plateau au titre de 750.
Quelle va être la masse x, en grammes, du plateau ?

Exercice 2.1

Trouver une quatrième grandeur pour avoir ainsi une proportion :

a) $2\,;\,5\,;\,8$

b) $x\,;\,xy\,;\,y$

c) $x\,;\,x^2\,;\,1$

d) $(x-y)\,;\,(x+y)\,;\,(x^2-y^2)$

e) $7\,;\,9\,;\,14$

f) $x^2\,;\,xy\,;\,xy$

g) $(x-4)\,;\,(x+4)\,;\,(x^2-16)$

Exercice 2.2

Trente ouvriers ont creusé une tranchée en 96 heures. Combien de temps 24 de ces ouvriers auraient-ils mis pour effectuer le même travail ?

Exercice 2.3

Un paysan possède un troupeau de 50 vaches. Il sait qu'il a, avec ce troupeau, du fourrage pour 54 jours d'hiver. Il décide de vendre 5 vaches ; pour le reste du troupeau, quel est le nombre de jours que durera le fourrage du paysan ?

Exercice 2.4

Dans une recette prévue pour 4 personnes, il faut 250 g de farine et 3 oeufs. Le temps de cuisson est de 40 minutes dans un four à 220°C. Convertir toutes les données de cette recette pour l'adapter à 7 personnes

Exercice 2.5

Une plaque de beurre de 200 g coûte 3.30 fr. Le cuisinier peut dépenser chaque mois 95 fr pour l'achat du beurre. La première semaine, il en achète 8 plaques, la deuxième 12 plaques, la troisième 5 plaques. Combien peut-il en acheter la quatrième semaine ?

Exercice 2.6

Albert et Bastien ont respectivement 9 et 12 ans. Albert mesure $1,5$ m. Pouvez-vous estimer la taille de Bastien ?

Exercice 2.7

a) Lors d'une votation fédérale, sur $3'775'996$ citoyens actifs, $1'850'238$ se sont rendus aux urnes. Calculer le pourcentage de votants.

b) Lors de cette même votation, les $47,9\%$ des votants ont accepté la loi proposée. Combien de citoyens ont-ils voté oui ?

Exercice 2.8

Le volume de l'eau augmente de $7,5\%$ en se congelant. Combien de litres d'eau ont-ils produit un volume de glace de $16,125$ dm^3 ?

Exercice 2.9

L'eau représente le 60% du poids corporel total. Elle se répartit pour 60% à l'intérieur des cellules et pour 40% dans le secteur extracellulaire. Calculer :

a) le poids de l'eau intracellulaire d'un homme pesant 75 kg,

b) le poids d'une personne dont le poids de l'eau extracellulaire est de $21,6$ kg.

Exercice 2.10

Lors d'un examen, 85% des candidats ont réussi. Il y a eu 45 échecs. Combien de candidats se sont-ils présentés à l'examen ?

Exercice 2.11

"Aujourd'hui, avec $2,40$ fr on achète une livre de pain ; autrefois, on payait $1,20$ fr le kg... et il était bien meilleur !" s'exclame grand-mère.

a) Exprimer l'augmentation du coût du pain en %.

b) Si le salaire de grand-père était à l'époque de 1300 fr, quelle somme recevrait-il actuellement (en supposant que l'augmentation des salaires a été la même que celle du coût du pain) ?

Exercice 2.12

Sachant que la TVA (taxe sur la valeur ajoutée) admet un taux de 8%, trouver le montant à débourser pour acheter une robe dont le prix sans les taxes est de $77,50$ fr.

Exercice 2.13

Vous désirez vous rendre à Londres et vous échangez 450 CHF. Quel montant la banque suisse vous remettra-t-elle en £, sachant que le taux de change de la livre est de 1,40 ?

Exercice 2.14

De retour d'un voyage en Finlande, Martine échange ses euros restants. Si la banque lui a remboursé $184,20$ CHF, quelle somme lui restait-elle en euros, sachant que le taux de change de l'euro est de 1,09.

Exercice 2.15

Pierre s'est rendu en vacances en Italie et Jacques en Angleterre. De retour en Suisse, ils s'aperçoivent qu'ils ont acheté la même paire de basket. Pierre a payé $82,5$€, alors que Jacques a payé 63£. Sachant que le taux de change de l'euro et de la livre sterling étaient respectivement de $1,09$ et $1,40$, déterminer lequel des deux amis a fait la meilleure affaire.

Exercice 2.16

Voici ci-contre un extrait de plan de situation au $1 : 1'000$ d'une parcelle à construire (en forme de trapèze rectangle) :

a) Quelle est l'aire de ce terrain ?

b) Quel est le prix de vente de ce terrain s'il est vendu à 125 fr le m^2 ?

Exercice 2.17

La maquette d'un bâtiment a les dimension suivantes : 42 cm de long, 36 cm de large et 21 cm de haut. Réellement, le bâtiment a 21 m de long, 18 m de large et 11 m de haut. La maquette est-elle réalisée à l'échelle ? Si oui, quelle est l'échelle utilisée ? Si non, modifier une des dimensions pour que la maquette soit à l'échelle et indiquer cette échelle.

Exercice 2.18
La pente moyenne d'un toboggan est de 45%. Arrivé au terme de sa glissade, un enfant doit parcourir une distance de 6 m pour regagner le pied de l'échelle verticale dont on cherche la hauteur.

Exercice 2.19
Les trains de montagne peuvent franchir des pentes maximales de 12%. Quelle peut être la longueur minimum de la ligne ferroviaire reliant Oberwald (alt. 1368 m) au col de la Furka (alt. 2431 m) ?

Exercice 2.20
Le départ d'une descente de la Coupe du monde de ski est donné à une altitude de 2572 m et l'arrivée est à 1560 m. Sur une carte à l'échelle $1 : 25'000$, la longueur horizontale représente 16 cm. Quelle est la pente moyenne de cette descente ?

Exercice 2.21
A Verbier, la station des Ruinettes est située à $2'195$ m d'altitude. Il en part un téléphérique qui monte aux Attelas. Par ailleurs, un téléski arrive aux Attelas par l'autre face de la montagne. Il part du Lac des Vaux, à $2'548$ m d'altitude. Sur une carte au $1 : 25'000$, la distance (horizontale) des Ruinettes aux Attelas mesure $5,8$ cm, alors que la distance entre le Lac des Vaux et les Attelas est de $2,3$ cm. La pente moyenne du téléphérique est de 37%.

a) Quelle est l'altitude de la station des Attelas ?

b) Quelle est la pente du téléski du Lac des Vaux ?

Exercice 2.22
Quelle est la masse du chargement d'un camion qui transport 3 m^3 de sable, sachant que la masse volumique du sable est de $1,4$ kg/dm^3 ?

Exercice 2.23
Calculer la masse d'un cylindre en aluminium de 7 cm de rayon et de 2 dm de hauteur, sachant que la masse volumique de l'aluminium est de $2,7$ kg/dm^3.

Exercice 2.24
La masse totale d'un jerrican de 20 l rempli de mazout est de 20 kg. Quelle est la masse du jerrican vide, sachant que la masse volumique du mazout vaut $0,92$ kg/dm^3 ?

Exercice 2.25
Une bouteille pèse $1,1$ kg lorsqu'elle est pleine d'eau et 400 g lorsqu'elle est vide. Quelle est la masse volumique de l'huile d'olive si la même bouteille remplie d'huile d'olive a une masse de $1,044$ kg ?

Exercice 2.26
Imaginer une expérience permettant de calculer la masse volumique d'un caillou.

Exercice 2.27

Aux Jeux Olympiques de Séoul en 1988, Florence Griffith s'est adjugée la médaille d'or du 200 mètres en établissant un nouveau record du monde dans le temps de $21,34$ secondes. Quelle a été sa vitesse moyenne en km/h ?

Exercice 2.28

René quitte sa maison à pied à 13h pour se rendre à l'école, située à $1'500$ mètres de chez lui ; il marche à $4,5$ km/h. Son frère Marc constate que René a oublié un livre et prend son vélo électrique pour le lui apporter ; il part à 13h10 et roule à 27 km/h, alors que René continue à marcher en direction de l'école sans savoir que son frère lui apporte son livre.

a) À quelle heure et à quelle distance de la maison Marc rejoint-il son frère ?

b) Lorsque Marc rejoint son frère, ils s'arrêtent 2 minutes pour discuter avant que René ne reparte à pied pour l'école et que Marc rentre à la maison. À quelle heure René arrive-t-il à l'école ?

Exercice 2.29

Au Grand Prix motocycliste de RFA, le vainqueur en catégorie 250 cm^3 a parcouru $108,62$ km en 36 min $5,6$ s. Le vainqueur de la catégorie des 500 cm^3 a roulé à une vitesse moyenne de $11,24$ km/h supérieur à celle du vainqueur des 250 cm^3.
Quelle distance a-t-il parcourue s'il a roulé durant 40 min $21,64$ s ?

Exercice 2.30

Si le débit moyen du fleuve Amazone est, à son embouchure, de $110'000$ m^3/s, calculer la quantité d'eau qui s'écoule chaque jour.

Exercice 2.31

À Paris, chaque quart d'heure, il s'écoule en moyenne $270'000$ m^3 d'eau sous les ponts enjambant la Seine. Le Rhin, à Bâle, transporte en moyenne $54'000'000$ litres d'eau à la minute.
Quelle fleuve a le débit le plus important ?

Exercice 2.32

On remplit une piscine de 600 m^3 à l'aide de deux robinets débitant respectivement $3,2$ litres à la seconde et 288 litres à la minute. Quelle est la durée de remplissage de la piscine si les deux robinets sont ouverts au même moment ?

Exercice 2.33

Avant 1967, le titre des pièces de monnaie suisses de 50 ct, 1 fr et 2 fr était de 835.

a) Quelle est la masse d'argent pur contenu dans une pièce de 50 ct de 1965 dont la masse est de $2,5$ g ?

b) Quelle est la masse d'argent pur contenu dans une pièce de 1 fr de 1949 dont la masse est de 5 g ?

c) Quelle est la masse d'une pièce de 2 fr de 1957 si l'on sait que sa masse d'argent pur est de $8,35$ g ?

Exercice 2.34

Un lingot d'argent au titre de 835 a une masse de $1'260$ gramme.

a) Quelle est la quantité d'argent pur contenu dans ce lingot ?

b) On fond le lingot en y ajoutant 630 g d'argent pur ; quel est le titre du nouvel alliage obtenu ?

Exercice 2.35

On fond deux lingots d'or, l'un de 300 g au titre de 900 et l'autre de 500 g au titre de 950. Quel est le titre du nouvel alliage ?

Exercice 2.36

Un lingot alliage d'argent pur et de cuivre pèse 1768 g et a un titre de 950.

a) Quelle masse d'argent pur contient-il ? Quelle est la masse du cuivre ?

b) On décide de porter ce lingot au titre de 680 en ajoutant du cuivre. Quelle est la masse finale du lingot et la masse de cuivre à ajouter ?

Pour aller plus loin

Exercice 2.37

Un vigneron vend à un premier acheteur la moitié de sa production annuelle de vin. Il vend ensuite les 80% de ce qu'il lui reste à un deuxième acheteur.
Après le passage des deux acheteurs, il lui reste en cave $12'000$ litres. Quelle était (en litres) sa production annuelle ?

Exercice 2.38

Une infirmière doit régler le débit d'un goutte-à-goutte de sorte que les 50 cl de liquide pénètrent dans le corps du malade en 3 heures et 20 minutes.
Après deux heures, le médecin ordonne de diminuer le débit de $0,05$ cl par minute.

a) Quel était le débit, en cl/min, du goutte-à-goutte avant l'intervention du médecin ?

b) Jusqu'à l'intervention du médecin, quelle quantité de liquide s'est-elle écoulée ?

c) Quelle est la durée totale du traitement ?

Exercice 2.39

Aux États-Unis, une amie à qui je demandais quelle était la consommation moyenne de sa voiture me répondit : "20 miles au gallon". Perplexe, je consultai mon guide de voyage :

- *Gallon : unité de capacité équivalant à* $4,54$ *litres.*
- *Mile : unité de longueur équivalant à* $1'609$ *mètres.*

Quelle est la consommation (en litre aux 100 km) de ce véhicule ?

Exercice 2.40

Un antiquaire déclare : "J'ai vendu ce matin un vase chinois $2'000$ fr. en perdant 20% sur le prix d'achat. Mais l'après-midi, j'ai vendu un autre vase $2'000$ fr. en gagnant 25% sur le prix d'achat. C'est donc finalement une bonne journée". Êtes-vous d'accord avec l'antiquaire ?

Exercice 2.41
La superficie du lac de Gruyère, à sa cote maximale, est de 10 km^2. Lorsqu'on ouvre les vannes du barrage de Rossens, 150 m^3 d'eau s'écoulent du lac de Gruyère chaque seconde. L'altitude de ce lac est de 677 m.
Quelle durée, théorique, faudrait-il pour abaisser de 10 cm le niveau du lac sachant que ses divers affluents débitent chaque seconde 45 m^3 ?

Exercice 2.42
Si 9 artisans boivent 12 pots de vin en 8 jours, combien 24 artisans boiront-ils de vin en 30 jours ?

Solutions

Solution 2.1

a) 20	b) y^2	c) x
d) $(x+y)^2$	e) 18	f) y^2
g) $(x+4)^2$		

Solution 2.2
120 heures

Solution 2.3
60 jours

Solution 2.4
Il faut $437,5$ g de farine et $5,25$ oeufs ! A priori le temps de cuisson et la température sont les mêmes.

Solution 2.5
3

Solution 2.6
Avec une règle de trois, cela donne 2 m. Est-ce vraiment raisonnable ?

Solution 2.7
a) 49%
b) 886'264

Solution 2.8
15 litres

Solution 2.9
a) 27 kg
b) 90 kg

Solution 2.10
300 candidats

Solution 2.11
a) 300%
b) 5200 fr.

Solution 2.12
$83,70$ fr.

Solution 2.13
$321,43$ £

Solution 2.14
$168,99$€

Solution 2.15
C'est Jacques

Solution 2.16

a) Si x représente la grande base, y la petite et z la hauteur, et que toutes les trois sont mesurées en cm, l'aire de la parcelle vaut $\mathcal{A} = 100xy + 50(z - y)x$ m^2.

b) Le prix de vente vaut $125 \cdot \mathcal{A}$ fr.

Solution 2.17
Selon les deux premières mesures, l'échelle est 1 : 50, mais la hauteur n'est pas exacte : la maquette devrait mesurer 22 cm de haut.

Solution 2.18
$2,7$ m

Solution 2.19
$8,858$ km

Solution 2.20
$25,3\%$

Solution 2.21

a) 2731 m

b) $31,91\%$

Solution 2.22
4200 kg

Solution 2.23
$8,31$ kg

Solution 2.24
$1,6$ kg

Solution 2.25
$0,92$ kg/dm^3

Solution 2.26

Solution 2.27
$33,74$ km/h

Solution 2.28

a) À 13h12, après avoir parcouru 900 m

b) 13h22

Solution 2.29
$129,023$ km

Solution 2.30
$9'504'000'000$ m^3

Solution 2.31
Le Rhin

Solution 2.32
20 heures et 50 minutes

Solution 2.33
a) $2,0875$ g b) $4,175$ g c) 10 g

Solution 2.34
a) $1052,1$ g b) 890

Solution 2.35
$931,25$

Solution 2.36

a) $1679,6$ g d'argent et $88,4$ g de cuivre

b) La masse finale est 2470 g et on a ajouté 702 g de cuivre

Solution 2.37
$120'000$ litres

Solution 2.38
a) $0,25$ cl/min b) 30 cl c) $3h40$

Solution 2.39
$14,11$ litres au 100 km

Solution 2.40
Non : l'antiquaire a perdu 100.-

Solution 2.41
2 heures 38 minutes et 44 secondes

Solution 2.42
120

3 Fonction affines

3.1 Généralités

3.1.1 Définition d'une fonction affine

Définition
On appelle **fonction affine** toute fonction du type :

$$x \mapsto m \cdot x + h \quad \text{(avec } m \text{ et } h \text{ des nombres réels fixes)}$$

Exemple
La fonction $x \mapsto 2\,x + 5$ est une fonction affine. Cela signifie qu'on attache à tout nombre réel x son image par f : $2\,x + 5$.

De manière équivalente, on peut aussi écrire

$$f(x) = m\,x + h$$

où $f(x)$ est l'image de x par f.

Exemple
La fonction de l'exemple précédent s'écrit $f(x) = 2\,x + 5$.

Si $f(x) = 2x + 5$, $\quad f(0) = 5$, $\quad f(-1) = 3$, $\quad f(3) = 11$.

3.1.2 Graphe d'une fonction affine

Le graphe d'une fonction affine est une droite. Pour la représenter, on procède en deux étapes :
On dresse un tableau des valeurs : on choisit quelques valeurs de x et on calcule l'image par f de ces x.

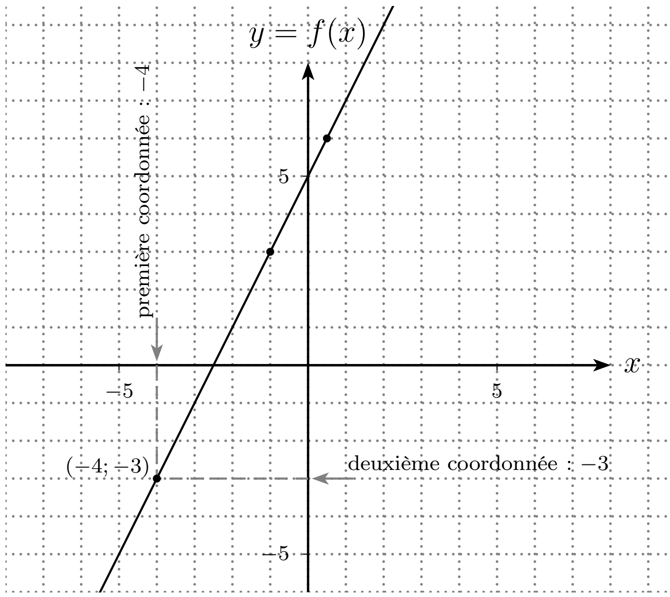
Exemple

x	-4	-3	-2	-1	0	1	$\frac{1}{2}$
$f(x) = 2\,x + 5$	-3		1	3		7	6

On place les paires de nombres ainsi obtenues sur un graphique : sur l'axe horizontal (abscisses), on lit x, la première coordonnée du point ; sur l'axe vertical (ordonnées), on lit $y = f(x)$, la deuxième coordonnée du point. Ces points forment une droite qu'on peut tracer dès qu'on a placé deux points. Les autres points permettent de vérifier si la droite tracée est correcte : ils doivent être sur cette droite.

Exemple

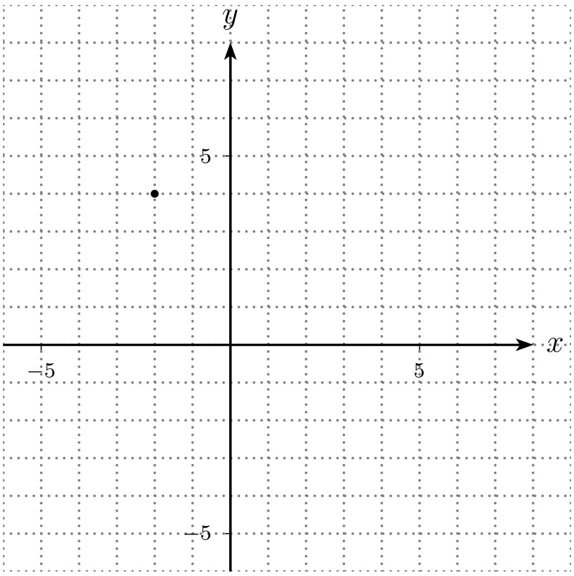
Graphe de $f(x) = 2\,x + 5$



Exemple
Représentons le graphe de $f(x) = -3\,x - 2$.
Première étape, le tableau des valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	$\frac{1}{2}$
$f(x) = -3\,x - 2$		4						

Seconde étape, le placement des paires de nombres :



3.1.3 Pente et ordonnée à l'origine d'une fonction affine

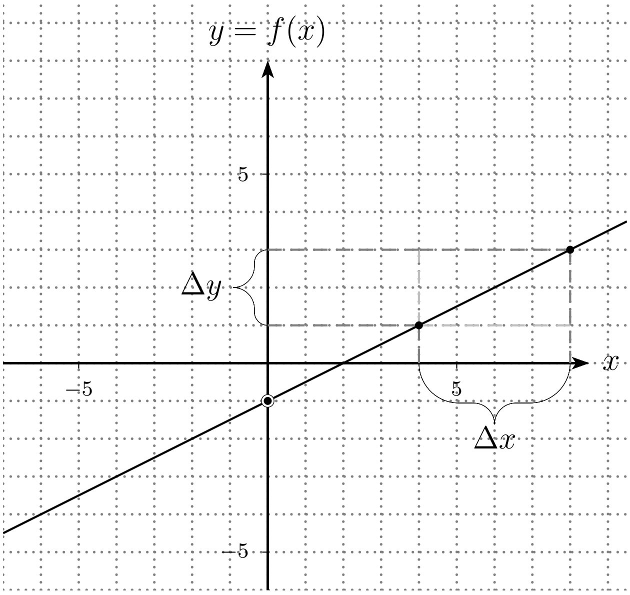
Définition
On appelle **pente** de la droite le rapport

$$\frac{\text{dénivellation (verticale)}}{\text{distance horizontale}} = \frac{\text{différence de hauteur}}{\text{différence de longueur}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Définition
On appelle **ordonnée à l'origine** la hauteur à laquelle la droite coupe l'axe des y.

On peut voir sur le graphique que la pente vaut m et que l'ordonnée à l'origine vaut h.

Exemple
On a représenté ci-dessous le graphe de $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$.



Pente :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = m$$

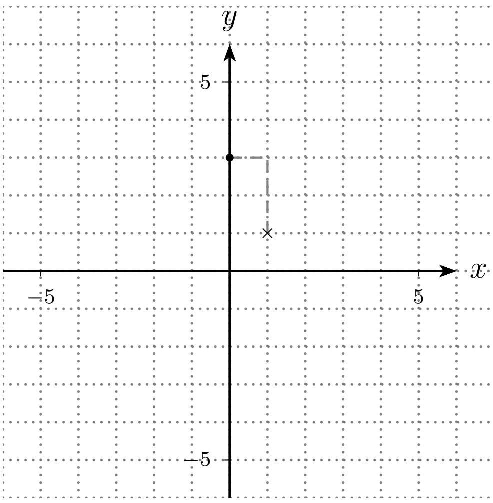
Ordonnée à l'origine :
La droite coupe l'axe des y à la hauteur $y = -1 = h$
c'est-à-dire
au point de coordonnées $(0; -1)$.

On peut représenter le graphe d'une fonction affine en utilisant m et h sans recourir à un tableau des valeurs.

Exemple
Représentons le graphe de $f = -2\,x + 3$ à l'aide de m et h.

$f(x) = -2\,x + 3$

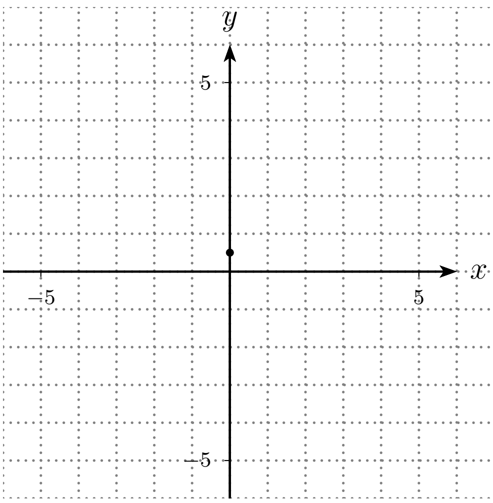
$m = -2,\ h = 3$



Exemple
Représentons le graphe de $f = -x + \dfrac{1}{2}$ à l'aide de m et h.

$f = -x + \dfrac{1}{2}$

$m = \qquad ,\ h = \dfrac{1}{2}$



3.1.4 Intersection avec l'axe des x (abscisses)

Définition
On appelle **zéro** de f le x qui annule $f(x)$.

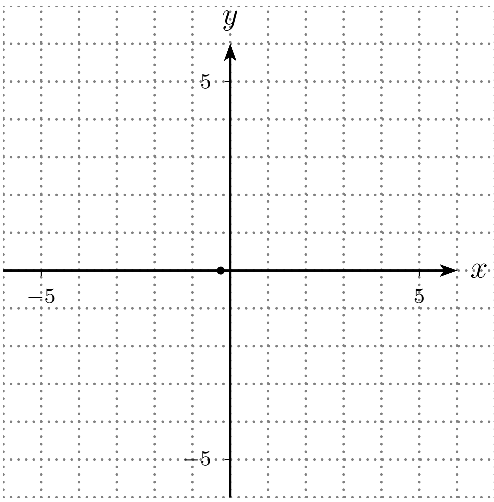
Propriété
Le zéro de f est la première coordonnée du point d'intersection de la droite et de l'axe des x.

Pour déterminer la valeur du zéro de f, on résout donc l'équation $m\,x + h = 0$.

Exemple
Déterminons le zéro de $f(x) = 4\,x + 1$. Il faut résoudre l'équation $4\,x + 1 = 0$:

$$4\,x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\,x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

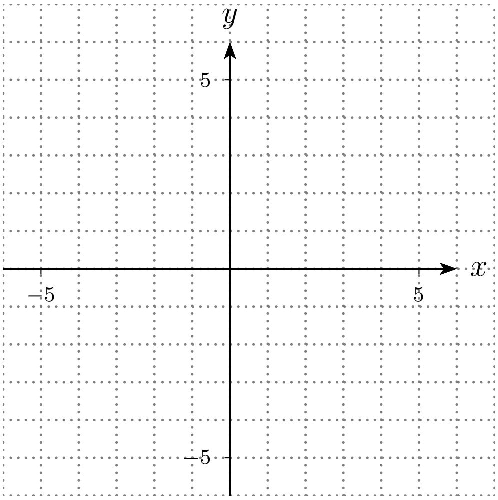
Donc le zéro de $f(x) = 4\,x + 1$ est $x = -\frac{1}{4}$. Autrement dit la droite coupe l'axe des x au point d'abscisse $x = -\frac{1}{4}$, c'est-à-dire au point de coordonnées $(-\frac{1}{4}; 0)$.



Exemple
Déterminons le zéro de $f(x) = -10\,x + 5$. Il faut résoudre l'équation $-10\,x + 5 =$

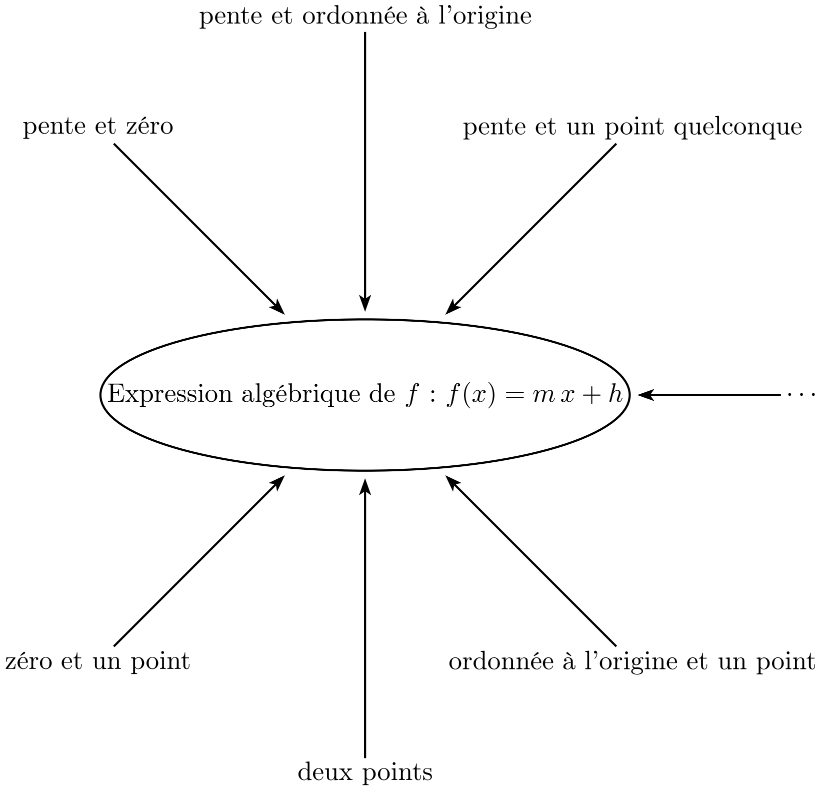
$$-10\,x + 5 = \qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow\ x =$$

Donc le zéro de $f(x) = -10\,x + 5$ est $x =$. Autrement dit la droite coupe l'axe des x au point d'abscisse $x =$, c'est-à-dire au point de coordonnées (;).



3.2 Détermination d'une fonction affine

Parfois, on ne dispose pas de l'expression algébrique de la fonction f ; mais des informations nous permettent de la retrouver :



3.2.1 À partir de la pente et de l'ordonnée à l'origine

Si on dispose de la pente m et de l'ordonnée à l'origine h de f, il suffit de remplacer m et h par ces valeurs dans la formule générale $f(x) = m\,x + h$.

Exemple
Déterminons l'expression algébrique de la fonction affine de pente 4 et d'ordonnée à l'origine 10.

$$f(x) = m\,x + h \Leftrightarrow f(x) = 4\,x + 10$$

3.2.2 À partir de la pente et de l'intersection avec l'axe des x

Si on dispose de la pente m et du zéro de f, il faut tout d'abord remplacer m par sa valeur dans la formule générale $f(x) = m\,x + h$; ensuite, on remplace x par la valeur du zéro et résout l'équation $m\,x + h = 0$.

Exemple
Déterminons l'expression algébrique de la fonction affine de pente 2 dont le zéro est 17.

$$f(x) = m\,x + h = 2\,x + h$$

$$\text{Or } 2\,x + h = 0 \text{ quand } x = 17 \Leftrightarrow 2 \cdot 17 + h = 0 \Leftrightarrow h = -34.$$

$$\text{Donc } f(x) = 2\,x + (-34),\ \text{ c'est-à-dire } f(x) = 2\,x - 34.$$

3.2.3 À partir de la pente et d'un point

Si on dispose de la pente m et d'un point appartenant au graphe de f, il faut tout d'abord remplacer m par sa valeur dans la formule générale $f(x) = m\,x + h$; ensuite, on remplace x par la valeur de la première coordonnée du point et y par la valeur de la deuxième coordonnée du point ; puis on résout l'équation $m\,x + h = y$.

Exemple
Déterminons l'expression algébrique de la fonction affine de pente -3 dont le graphe passe par le point $\left(\frac{2}{3}; 7\right)$.

$$f(x) = m\,x + h = -3\,x + h$$

$$\text{Or } -3\,x + h = y \text{ quand } x = \frac{2}{3} \text{ et } y = 7 \Leftrightarrow -3 \cdot \frac{2}{3} + h = 7 \Leftrightarrow -2 + h = 7 \Leftrightarrow h = 9.$$

$$\text{Donc } f(x) = -3\,x + 9.$$

3.2.4 À partir de l'ordonnée à l'origine et d'un point

Si on dispose de l'ordonnée à l'origine h et d'un point appartenant au graphe de f, il faut tout d'abord remplacer h par sa valeur dans la formule générale $f(x) = m\,x + h$; ensuite, on remplace x par la valeur de la première coordonnée du point et y par la valeur de la deuxième coordonnée du point ; puis on résout l'équation $m\,x + h = y$.

Exemple
Déterminons l'expression algébrique de la fonction affine d'ordonnée à l'origine -3 dont le graphe passe par le point $\left(\dfrac{2}{3}; 7\right)$.

$$f(x) = m\,x + h = m\,x - 3$$

$$\text{Or } m\,x - 3 = y \text{ quand } x = \frac{2}{3} \text{ et } y = 7 \Leftrightarrow m \cdot \frac{2}{3} - 3 = 7 \Leftrightarrow \frac{2\,m}{3} - 3 = 7$$

$$\Leftrightarrow 2\,m - 9 = 21 \Leftrightarrow 2\,m = 30 \Leftrightarrow m = 15.$$

$$\text{Donc } f(x) = 15\,x - 3.$$

3.2.5 À partir de l'intersection avec l'axe des x et d'un point

Si on dispose du zéro de f et d'un point appartenant au graphe de f, il faut résoudre un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x_0 \text{ est le zéro de } f \\ \text{le point } P(x_p; y_p) \text{ appartient au graphe de } f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\,x_0 + h = 0 \\ m\,x_p + h = y_p \end{cases}$$

Exemple
Déterminons l'expression algébrique de la fonction affine dont le zéro est -3 et dont le graphe passe par le point $\left(\dfrac{2}{3}; 7\right)$.

$$\begin{cases} m\,(-3) + h = 0 \\ m\,\frac{2}{3} + h = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 3\,m \\ m\,\frac{2}{3} + 3\,m = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 3\,m \\ 11\,m = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = \frac{63}{11} \\ m = \frac{21}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \tfrac{21}{11}\,x + \tfrac{63}{11}$$

3.2.6 À partir de deux points

Il y a plusieurs méthodes pour déterminer l'expression algébrique d'une fonction algébrique dont le graphe passe par deux points donnés.
On peut, par exemple, résoudre le système :

$$\begin{cases} \text{le point } A(x_a; y_a) \text{ appartient au graphe de } f \\ \text{le point } B(x_b; y_b) \text{ appartient au graphe de } f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\,x_a + h = y_a \\ m\,x_b + h = y_b \end{cases}$$

Ou alors, on peut d'abord calculer la pente m et revenir ainsi à la situation (qu'on sait résoudre) où on dispose de la pente et d'un point. Pour calculer la pente, on utilise sa définition

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$

Exemple
Déterminons l'expression algébrique de la fonction affine dont le graphe passe par les points $A(3; 4)$ et $B(9; 16)$.

Méthode du système :

$$\begin{cases} \text{le point } A \text{ appartient au graphe de } f \\ \text{le point } B \text{ appartient au graphe de } f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \cdot 3 + h = 4 \\ m \cdot 9 + h = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} h = 4 - 3\,m \\ 9\,m + (4 - 3\,m) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = 4 - 3\,m \\ 6\,m = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h = -2 \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = 2\,x - 2$$

Méthode par le calcul de la pente :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16 - 4}{9 - 3} = \frac{12}{6} = 2$$

Le problème revient alors à déterminer l'expression algébrique de la fonction affine de pente 2 dont le graphe passe par le point $A\,(3; 4)$ (ou $B\,(9; 16)$, on peut choisir).

$$f(x) = m\,x + h = \quad \cdot x \,+\, h$$

Or $\quad \cdot x + h = y$ quand $x =$ $\quad$ et $y =$ $\quad \Leftrightarrow \quad \cdot \quad + h = \quad \Leftrightarrow \quad + h = \quad \Leftrightarrow h =$

Donc $f(x) =$

3.3 Modélisation

Les fonctions affines permettent de modéliser de nombreuses situations.

3.3.1 Mouvements rectilignes uniformes

Définition
On appelle **mouvement rectiligne uniforme** un mouvement qui a lieu en ligne droite et à vitesse constante.

Exemple
Deux cyclistes partent simultanément de deux endroits distants de 300 km et se dirigent l'un vers l'autre. Le premier roule à 22 km/h et le deuxième à 26 km/h. Dans combien de temps les deux cyclistes vont-ils se rencontrer ?

Chacun des deux cyclistes est en MRU. C'est un modèle imparfait, puisqu'on ne tient compte ni des éventuels arrêts des deux cyclistes ni des conditions de circulation.

La distance du premier cycliste par rapport à son point de départ peut être décrite par la fonction affine $d_1(t) = 22\,t$, avec t le temps en heure. La distance du second cycliste par rapport au point de départ du **premier** cycliste est, quant à elle, décrite par $d_2(t) = 300-26\,t$, avec la même variable t, qui tient ici le rôle que x jouait jusqu'à présent.

Les deux cyclistes se rencontreront au temps t lorsque $d_1(t) = d_2(t)$, c'est-à-dire lorsque

$$22\,t = 300 - 26\,t \Leftrightarrow 48\,t = 300 \Leftrightarrow t = \frac{300}{48} \Leftrightarrow t = \frac{25}{4} \Leftrightarrow t = 6,25 \quad \text{soit après 6 h15.}$$

Exemple
Un groupe de cyclistes part en excursion et se déplace à une vitesse de 30 km/h. Une heure et quarante-cinq minutes plus tard, la camionnette transportant le ravitaillement part à leur poursuite. Si sa vitesse est de 50 km/h, combien de temps lui faudra-t-il pour rejoindre le groupe ? Quelle sera alors la distance parcourue ?

Le groupe de cyclistes ainsi que la camionnette sont en MRU.

La distance du groupe de cyclistes par rapport à leur point de départ peut être décrite par la fonction affine $d_1(t) = \qquad \cdot t$, avec t le temps en heure. La distance de la camionnette par rapport au point de départ est, quant à elle, décrite par $d_2(t) = 50 \cdot (t - 1,75)$, avec la même variable t.
La camionnette rattrapera le groupe de cyclistes au temps t lorsque $d_1(t) = d_2(t)$, c'est-à-dire lorsque

$$\quad \cdot t = 50 \cdot (t - 1,75) \Leftrightarrow \qquad \cdot t = 50 \cdot (-1,75) \Leftrightarrow t = \frac{\qquad}{\qquad} \Leftrightarrow t = \qquad \quad \text{soit après} \quad \text{h}$$

La distance parcourue sera de $d_1(\quad , \qquad) = \qquad \cdot \qquad = \qquad$ km.

3.3.2 Mélanges

On peut modéliser à l'aide d'une fonction affine les situations où on remplace une partie d'un mélange de deux composants par un des deux composants pur.

Exemple
Un radiateur d'une capacité de 50 litres est rempli d'un mélange contenant 22% d'antigel. Quelle quantité de ce mélange doit être remplacée par de l'antigel pur pour obtenir une concentration de 40% d'antigel ?

La concentration d'antigel dans le mélange final (en %) [1] est donnée par la fonction

$$c(x) = \frac{(50-x)\cdot 0,22 + x\cdot 1}{50}$$

où x est la quantité de mélange remplacée par de l'antigel pur.
C'est une fonction affine car $c(x) = \dfrac{(50-x)\cdot 0,22 + x\cdot 1}{50} \Leftrightarrow c(x) = \dfrac{(1-0,22)}{50}\cdot x + 0,22$ c'est-à-dire $c(x) = \dfrac{0,78}{50}\cdot x + 0,22$.

Pour déterminer quelle part du mélange initial remplacer par de l'antigel pur pour obtenir un mélange final avec une concentration de 40% d'antigel, on cherche la valeur de x telle que $c(x) = 0,4$. On doit donc résoudre l'équation

$$0,4 = \frac{0,78}{50}\cdot x + 0,22 \Leftrightarrow 0,18 = \frac{0,78}{50}\cdot x \Leftrightarrow x =$$

1. voir le paragraphe 2.3.1

Exercices

Exercice 3.1
Soit la fonction $f(x) = 3\,x + 4$. Calculer

a) $f(1)$ b) $f(2)$ c) $f(\frac{1}{3})$

Exercice 3.2
Soit la fonction $f(x) = 2\,x - 1$. Calculer

a) l'image de 2 par f b) l'image de $\frac{1}{2}$ par f c) l'image de 0 par f

Exercice 3.3
Soit la fonction $f(x) = -\,x + 7$. Déterminer

a) x pour que $f(x) = 5$ b) x pour que $f(x) = 9$ c) x pour que $f(x) = 0$

Exercice 3.4
Dresser un tableau des valeurs puis esquisser le graphe des fonctions affines suivantes

a) $f(x) = 3\,x - 2$ b) $f(x) = \frac{1}{2}\,x + 2$ c) $f(x) = -\,x + \frac{1}{2}$

Exercice 3.5
Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine puis esquisser le graphe des fonctions affines suivantes

a) $f(x) = x + 3$
b) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 4$
c) $f(x) = 2\,x$
d) $f(x) = -2$

Exercice 3.6
Esquisser le graphe des fonctions affines dont on donne la pente et l'ordonnée à l'origine :

a) $m = 1$ et $h = 2$ b) $m = -1$ et $h = 0$ c) $m = 0$ et $h = 3$

Exercice 3.7
Déterminer l'ordonnée à l'origine et l'intersection avec l'axe des abscisses puis esquisser le graphe des fonctions affines suivantes

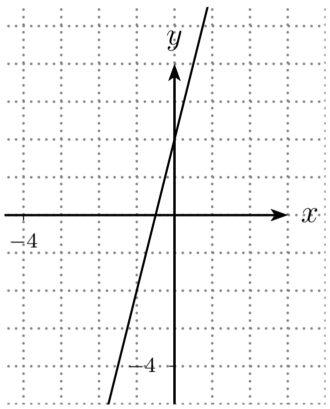
a) $f(x) = 5\,x + 4$ b) $f(x) = -2\,x + 3$ c) $f(x) = \frac{1}{2}\,x - 1$

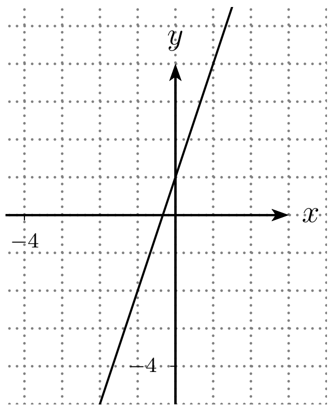
Exercice 3.8

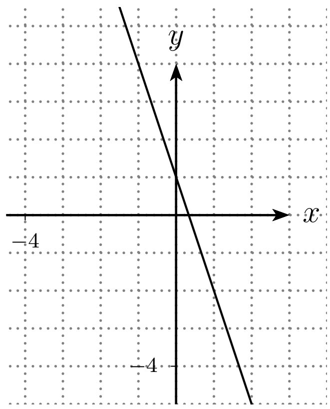
Associer à chaque expression algébrique le graphe correspondant :

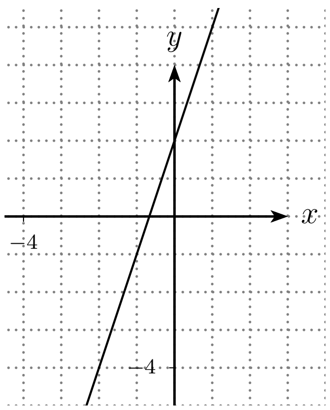
a) $f(x) = -3\,x + 1$ c) $f(x) = 3\,x + 1$ e) $f(x) = 3\,x + 2$

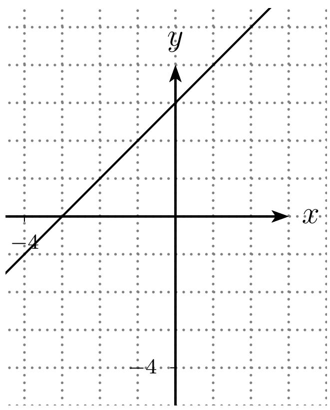
b) $f(x) = 4\,x + 2$ d) $f(x) = -3\,x - 1$ f) $f(x) = x + 3$

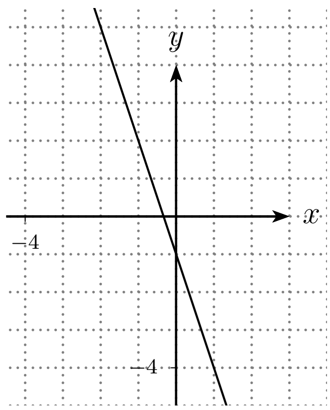
1) 

3) 

5) 

2) 

4) 

6) 

Exercice 3.9

Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine $f(x)$ telle que :

a) elle ait une pente de 2 et une ordonnée à l'origine de 5.

b) $m = \frac{1}{2}$ et $h = -3$.

c) elle ait une pente de 6 et coupe l'axe des abscisses en $x = -2$.

d) elle ait une pente de -5 et passe par le point $(3; 0)$.

e) elle ait une pente de -5 et passe par le point $(0; 3)$.

f) $m = -1$ et elle passe par le point $(2; 9)$.

g) $h = -1$ et elle passe par le point $(2; 9)$.

h) elle passe par les points $(1; 2)$ et $(3; 4)$.

i) $f(1) = 5$ et $f(2) = 7$.

j) elle coupe l'axe des x en $x = 1$ et passe par le point $(-3; 2)$.

k) elle coupe l'axe des y en $y = 1$ et passe par le point $(-3; 2)$.

Exercice 3.10

On donne une liste de caractéristiques
- si c'est possible, déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine $f(x)$ qui respecte chaque caractéristique,
- si c'est impossible, expliquer pourquoi.

a) la fonction a une pente de 2 et une ordonnée à l'origine de 0.

b) la fonction a une pente de 0 et une ordonnée à l'origine de 2.

c) la fonction est verticale et coupe l'axe des x en 7.

d) la fonction est horizontale et coupe l'axe de y en 3.

e) la fonction a une pente de 5, coupe l'axe des abscisses en $x = -2$ et passe par le point $(-1; 6)$.

f) la fonction passe par les points $(1; -1)$, $(3; 5)$ et $(-1; -7)$.

Exercice 3.11

Deux autobus quittent les terminus opposés d'une ligne de 372 km au même moment. Si les vitesses des autobus sont de 70 km/h et de 85 km/h, combien de temps après le départ se rencontreront-ils ?

Exercice 3.12

Un cycliste fait un parcours de 112 km en 6 heures. Durant une partie de ce trajet, le cycliste roulait à 20 km/h, et durant l'autre partie, il a roulé à 16 km/h. Trouver la partie réalisée à chacune de ces vitesses.

Exercice 3.13

Un père défie son fils au 100 m et lui laisse 30 mètres d'avance. Le père court à une vitesse de 7 m/s, alors que le fils court à une vitesse de 4,5 m/s.

a) Qui a gagné ? avec combien de secondes d'avance ?

b) Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?

c) Le père et le fils ont-ils été côte à côte ? Si oui, quelle distance avait parcourue le père ?

Exercice 3.14

Le lièvre et la tortue.

On connaît tous cette fable de la Fontaine. Il y a d'abord le pari. Puis la tortue *part*, *s'évertue* et *se hâte avec lenteur* avec ses maigres 0,25 km/h. Le lièvre *broute*, *se repose*, *s'amuse* et à la fin seulement *part comme un trait* avec ses 70 km/h. Sachant que la distance à parcourir est 1 km :

a) Combien de temps met la tortue à parcourir le kilomètre de la course ?

b) Combien de temps met le lièvre à parcourir le kilomètre de la course ?

c) Sachant que le lièvre arrive 1 seconde après la tortue, combien de temps a-t-il attendu avant de partir ?

d) Où était la tortue au moment où le lièvre est parti ?

Exercice 3.15

Un système de refroidissement de 40 litres est rempli d'un liquide contenant 25% d'antigel. Quelle quantité de ce liquide doit-on retirer et remplacer par de l'antigel pur pour obtenir une concentration de 45% d'antigel ?

Exercice 3.16

Un infirmier aimerait obtenir une solution alcoolisée à 50% à partir de deux solutions alcoolisées, l'une à 70% et l'autre à 40%. Quelle proportion de la première doit-on utiliser pour obtenir ce mélange ?

Exercice 3.17

Un laitier achète 100 litres de lait. Pour vérifier la quantité achetée, il pèse le lait et obtient 102,7 kg. Déterminer la quantité d'eau qui a été ajoutée au lait, sachant qu'un litre de lait pur pèse 1 030 grammes.

Exercice 3.18

On a constaté qu'un technicien peut effectuer une tâche en 4 heures alors que son assistant peut la réaliser en 6 heures. Déterminer le temps nécessaire pour effectuer ce travail s'ils travaillent ensemble.

Exercice 3.19

Un garçon tond le gazon en 90 minutes, mais sa soeur peut le faire en 60 minutes. Combien leur faudra-t-il de temps s'ils travaillent ensemble avec deux tondeuses ?

Exercice 3.20

Deux conduites indépendantes permettent de remplir un réservoir, l'une en 8 heures et l'autre en 6 heures. Déterminer le temps nécessaire pour remplir le réservoir si les robinets des deux conduites sont ouverts.

Pour aller plus loin

Exercice 3.21

Si un bateau – qui navigue à une vitesse v – augmentait sa vitesse de 5 km/h, il mettrait 2 heures de moins pour effectuer un trajet de 300 km. Quelle est sa vitesse ?

Exercice 3.22

Cunégonde habite à 15 km de son lieu de travail. Un matin, elle prend sa voiture pour s'y rendre. Elle est pressée et dépasse la limite de vitesse en roulant à 15 km/h au-dessus de la limite autorisée. Elle roule ainsi 10 minutes de moins que si elle avait respecté la limite.

a) Quelle est la limite de vitesse sur la route empruntée par Cunégonde ?

b) Combien de temps Cunégonde met-elle à atteindre son travail cette fois-ci ?

c) A peine a-t-elle parqué son véhicule, qu'une policière munie d'un radar l'interpelle, l'amende et lui retire son permis. Le soir, Cunégonde rentre donc d'un bon pas en marchant à une vitesse de 5 km/h tout au long du trajet. Combien de temps marche-t-elle sur le trajet du retour ?

Exercice 3.23

La baignoire de Pierre peut contenir 140 litres. Le débit du robinet d'eau chaude est de 15 litres par minute. Lorsque Pierre ouvre les deux robinets – celui d'eau froide et celui d'eau chaude – la baignoire est pleine 3 minutes plus vite que s'il n'avait remplit la baignoire qu'avec de l'eau froide. Calculer le débit du robinet d'eau froide et le temps de remplissage dans chacun des deux cas.

Solutions

Solution 3.1

a) $f(1) = 7$ b) $f(2) = 10$ c) $f(\frac{1}{3}) = 5$

Solution 3.2

a) $f(2) = 3$ b) $f(\frac{1}{2}) = 0$ c) $f(0) = -1$

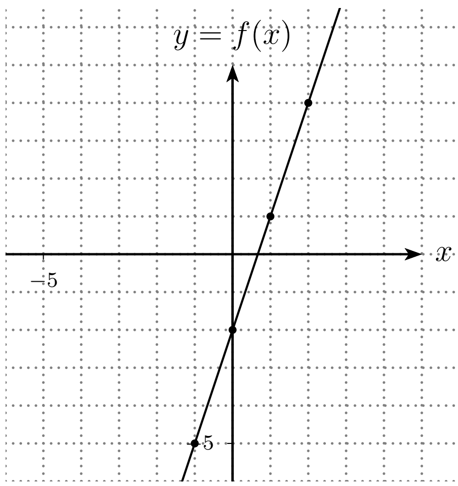
Solution 3.3

a) $x = 2$ b) $x = -2$ c) $x = 7$

Solution 3.4

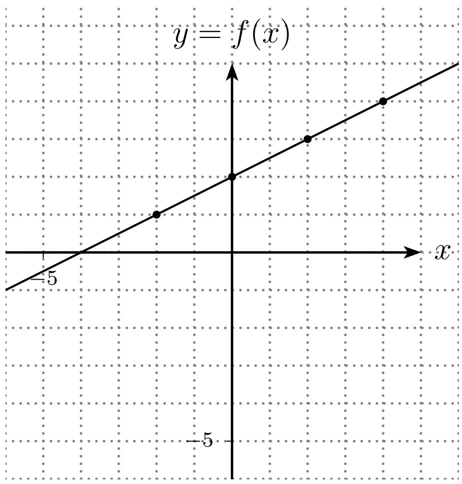
a)

x	-1	0	1	2
$f(x) = 3\,x - 2$	-5	-2	1	4



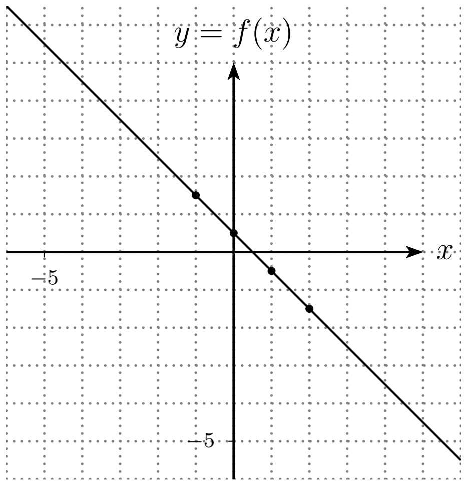
b)

x	-2	0	2	4
$f(x) = \frac{1}{2}\,x + 2$	1	2	3	4



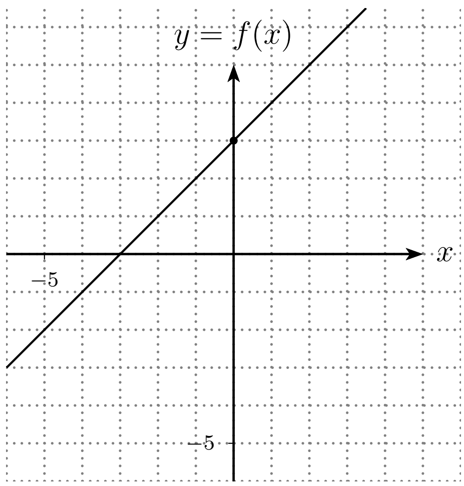
c)

x	-1	0	1	2
$f(x) = -x + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

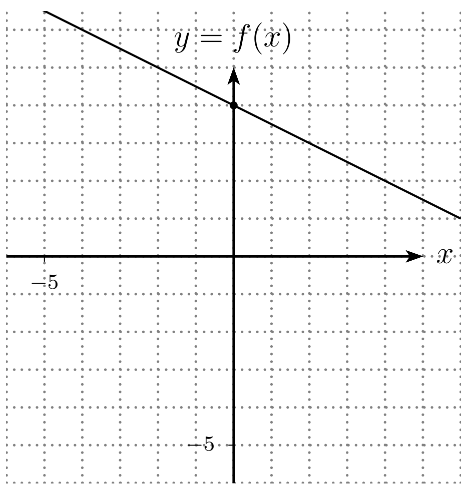


Solution 3.5

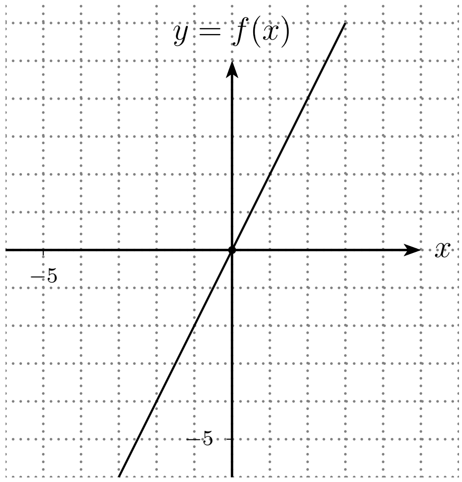
a) $f(x) = x + 3$
pente : $m = 1$
ordonnée à l'origine : $h = 3$.



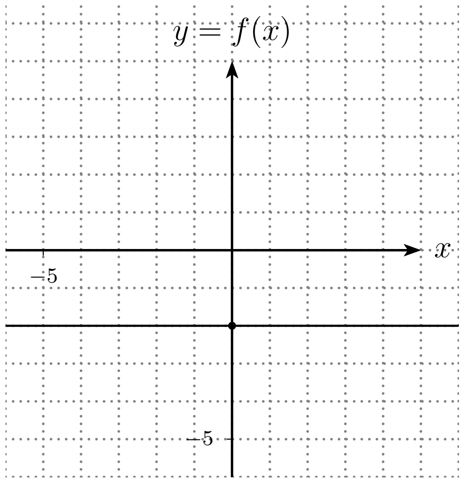
b) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 4$
pente : $m = -\frac{1}{2}$
ordonnée à l'origine : $h = 4$.



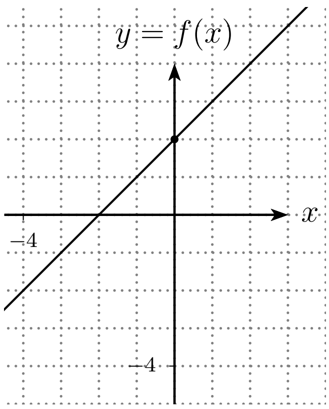
c) $f(x) = 2\,x$
pente : $m = 2$
ordonnée à l'origine : $h = 0$.

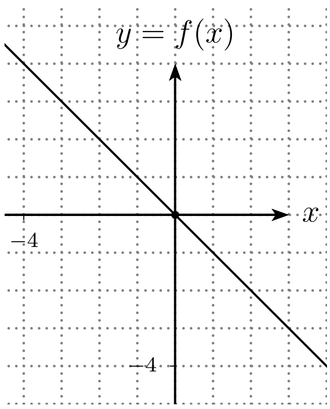


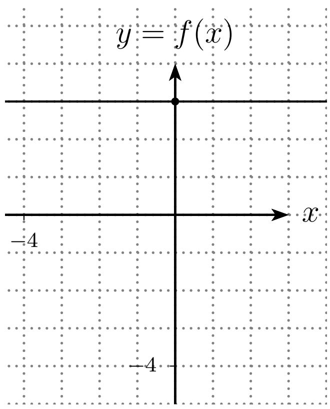
d) $f(x) = -2$
pente : $m = 0$
ordonnée à l'origine : $h = -2$.



Solution 3.6

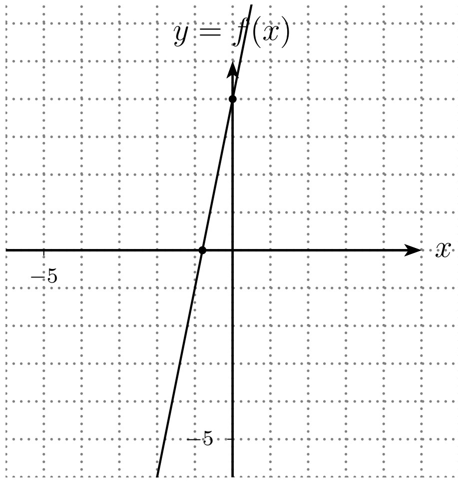
a) 

b) 

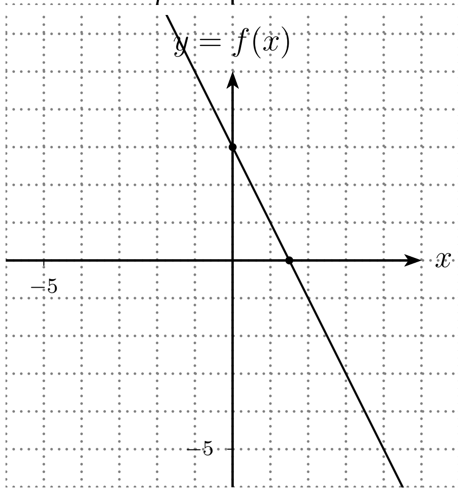
c) 

Solution 3.7

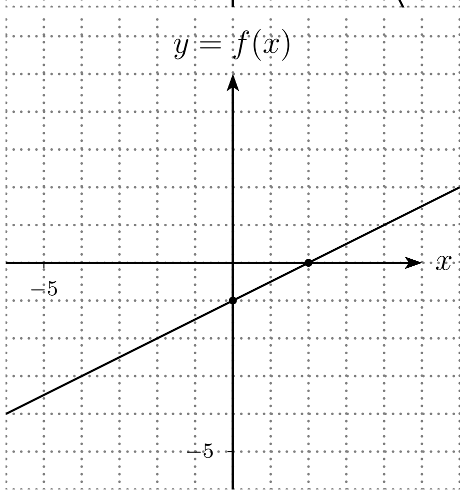
a) $f(x) = 5\,x + 4$
ordonnée à l'origine : $h = 4$
intersection avec l'axe des abscisses : $x = -\frac{4}{5}$



b) $f(x) = -2\,x + 3$
ordonnée à l'origine : $h = 3$
intersection avec l'axe des abscisses : $x = \frac{3}{2}$



c) $f(x) = \frac{1}{2}\,x - 1$
ordonnée à l'origine : $h = -1$
intersection avec l'axe des abscisses : $x = 2$



Solution 3.8

a↔5, b↔1, c↔3, d↔6, e↔2 et f↔4.

Solution 3.9

a) $f(x) = 2\,x + 5$
b) $f(x) = \frac{1}{2}\,x - 3$
c) $f(x) = 6\,x + 12$
d) $f(x) = -5\,x + 15$
e) $f(x) = -5\,x + 3$
f) $f(x) = -x + 11$
g) $f(x) = 5\,x - 1$
h) $f(x) = x + 1$
i) $f(x) = 2\,x + 3$
j) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$
k) $f(x) = -\frac{1}{3}\,x + 1$

Solution 3.10

a) $f(x) = 2\,x$
b) $f(x) = 2$
c) C'est impossible, car la pente d'une droite verticale n'est pas définie.
d) $f(x) = 3$
e) C'est impossible, car les deux premières caractéristiques imposent que

$$f(x) = 5\,x + 10$$

mais le point donné n'appartient pas au graphe de cette fonction ($f(-1) = 5$).
f) $f(x) = 3x - 4$

Solution 3.11
Les deux bus se rencontreront 2 heures et 24 minutes après le départ.

Solution 3.12
Le cycliste a parcouru 80 km à 20 km/h et 32 km à 16 km/h.

Solution 3.13

a) Le père a gagné avec 1,27 seconde d'avance.
b) 5,71 mètres les séparent.
c) Oui, tous deux avaient parcouru 84 mètres.

Solution 3.14

a) La tortue prend 4 heures.
b) Le lièvre met environ 51,43 secondes.
c) Il a attendu environ 3 heures 59 minutes et 9,57 secondes.
d) Elle était à environ 3,50 mètres de l'arrivée.

Solution 3.15
Il faut retirer 10,67 litres de liquide.

Solution 3.16
Il faut un mélange d'un tiers de la première solution et deux tiers de la seconde.

Solution 3.17
Le lait acheté contient 90 litres de lait pur et 10 litres d'eau.

Solution 3.18
Il leur faudra 2,4 h, c'est-à-dire 2 heures et 24 minutes.

Solution 3.19
Il leur faudra 36 minutes.

Solution 3.20
Il faudra environ 3 heures 25 minutes 43 secondes.

Solution 3.21
$v = 25$ km/h.

Solution 3.22

a) La vitesse est limitée à 30 km/h.
b) Elle a mis 20 minutes.
c) Elle marche durant 3 heures.

Solution 3.23
Le débit d'eau froide est de 20 litres par minute. Le temps de remplissage avec uniquement de l'eau froide est de 7 minutes.

4 Systèmes d'équations

Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, par exemple

$$\left\{\begin{array}{l} 3\,x = \;\;4\,y + 5 \\ 2\,x + 10\,y = -22 \end{array}\right.$$

c'est chercher l'ensemble des couples $(x; y)$ qui satisfont simultanément les deux équations.

On résout un système en le remplaçant par un autre système équivalent (qui possède le même ensemble de solution) mais dont la solution est plus facile à déterminer.

Deux systèmes sont équivalents si

1° chaque équation de l'un est équivalente à une équation de l'autre, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l} 3\,x = \;\;4\,y + 5 \\ 2\,x + 10\,y = -22 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3\,x - 4\,y = 5 \\ x + 5\,y = -11 \end{array}\right.$$

Ici, dans la première équation E_1, on a soustrait $4\,y$ aux deux membres, alors que, dans la seconde E_2, on a divisé les deux membres par 2.

2° l'une des équations est remplacée par une combinaison linéaire des deux équations, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{r} 3\,x - 4\,y = 5 \\ x + 5\,y = -11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3\,x - \;\;4\,y = 5 \\ 5\,x - 13\,y = 21 \end{array}\right.$$

Ici, la seconde équation E_2 est remplacée par la combinaison linéaire $2 \cdot E_1 - E_2$ (on vérifie en effet que $2\,(3\,x) - x = 5\,x$, $2\,(-4\,y) - 5\,y = -13\,y$ et $2 \cdot 5 - (-11) = 21$).

3° l'une des équations est utilisée pour substituer l'un de ses membres par l'autre dans l'autre équation, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{r} 3\,x - \quad 4\,y = 5 \\ x = -5\,y - 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} 3\,(-5\,y - 11) - \quad 4\,y = 5 \\ x = -5\,y - 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -19\,y - \quad 33 = 5 \\ x = -5\,y - 11 \end{array}\right.$$

Ici, on utilise la seconde équation E_2 pour substituer x par $-5\,y - 11$ dans E_1.

La méthode qui se généralise le mieux à des systèmes plus grand (plus d'équations ou plus d'inconnues) et celle qui consiste à *échelonner* le système afin d'obtenir un système ayant une équation à une inconnue et une équation à deux inconnues, comme :

$$\left\{\begin{array}{r} x + \;\;5\,y = -11 \\ 19\,y = -38 \end{array}\right. .$$

Pour ce faire, il suffit de remplacer une des équation par une combinaison linéaire qui élimine l'une des inconnues, par exemple x :

$$\left\{\begin{array}{r} 3\,x - 4\,y = 5 \\ x + 5\,y = -11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} -19\,y = 38 \\ x + 5\,y = -11 \end{array}\right.$$

ici la première équation E_1 est remplacée par la combinaison linéaire $E_1 - 3 \cdot E_2$ (on vérifie en effet que $3\,x - 3\,x = 0$, $-4\,y - 3\,(5\,y) = -19\,y$ et $5 - 3\,(-11) = 38$).

On peut ensuite trouver l'autre inconnue, ici y, puis la substituer dans l'équation à deux inconnues pour enfin déterminer x :

$$\left\{\begin{array}{r} -19\,y = 38 \\ x + 5\,y = -11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y = -2 \\ x + 5\,y = -11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} y = -2 \\ x + 5\,(-2) = -11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Finalement, on donne l'ensemble des solutions du système, c'est à dire l'ensemble des couples $(x;y)$ qui satisfont simultanément les deux équations :

$$\left\{\begin{array}{r} 3\,x - 4\,y = 5 \\ x + 5\,y = -11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -2 \\ x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x;y) \in \{(-1;-2)\}$$

Pour aller plus loin

Résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues, par exemple

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ 2\,x & - & y & + & 5\,z & = & 3 \\ 4\,x & + & 7\,y & + & 5\,z & = & -7 \end{array}\right.$$

c'est chercher l'ensemble des triplets $(x;y;z)$ qui satisfont simultanément les trois équations.

La méthode la plus efficace consiste à *échelonner* le système afin d'obtenir un système ayant une équation à une inconnue, une équation à deux inconnues et une équation à trois inconnues. Pour ce faire, on commence par remplacer E_2 par une combinaison linéaire de E_1 et E_2 qui ne contient aucun x, ici $2 \cdot E_1 - E_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ 2\,x & - & y & + & 5\,z & = & 3 \\ 4\,x & + & 7\,y & + & 5\,z & = & -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ 4\,x & + & 7\,y & + & 5\,z & = & -7 \end{array}\right.$$

Puis, on remplace E_3 par une combinaison linéaire de E_1 et E_3 qui ne contient aucun x, ici $4 \cdot E_1 - E_3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ 4\,x & + & 7\,y & + & 5\,z & = & -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ & & 5\,y & + & 3\,z & = & -13 \end{array}\right.$$

Ensuite, on remplace E_3 par une combinaison linéaire de E_2 et E_3 qui ne contient aucun y, ici $-5 \cdot E_2 + 7 \cdot E_3$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ & & 5\,y & + & 3\,z & = & -13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3\,y & + & 2\,z & = & -5 \\ & & 7\,y & - & z & = & -13 \\ & & & & 26\,z & = & -26 \end{array}\right.$$

On peut alors, grâce à E_3, trouver l'inconnue z, puis la substituer dans E_2 pour trouver y :

$$\left\{\begin{array}{r} x+3\,y+2\,z = -5 \\ 7\,y - z = -13 \\ z = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3\,y+2\,z = -5 \\ 7\,y-(-1) = -13 \\ z = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3\,y+2\,z = -5 \\ 7\,y = -14 \\ z = -1 \end{array}\right.$$

Et finalement, substituer y et z dans E_1 pour trouver x :

$$\left\{\begin{array}{r} x+3\,y+2\,z = -5 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3\,(-2)+2\,(-1) = -5 \\ y = -2 \\ z = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 3 \\ y & = & -2 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercices

Exercice 4.1

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} 3x + y = -13 \\ -11x - 8y = -13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = -20 \\ -3x - y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = -102 \\ 6x - y = -68 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -5x - y = 20 \\ -5x + 3y = 60 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -10x + 11y = 135 \\ -5x + 10y = -180 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ -3x + y = -25 \end{cases}$

Exercice 4.2

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} -2x + 2y = 4 \\ -9x - y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + 4y = -2 \\ x - 6y = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ -x + 5y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -x + 8y = -1 \\ -x + 3y = -4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 1 \\ -5x - 2y = -1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - y = 5 \\ 6x + y = -11 \end{cases}$

Exercice 4.3

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} -\frac{3}{4}x - \frac{2}{7}y = 5 \\ -3x - \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y = 1 \\ -\frac{7}{3}x + y = \frac{7}{3} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = \frac{7}{5} \\ -3x - 5y = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - \frac{2}{3}y = 5 \\ x - y = \frac{1}{5} \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}y = -2 \\ 2x + 5y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Exercice 4.4

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} -x - y = 1 \\ x + y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -3x + 7y = 1 \\ -6x + 14y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 1 \\ 5x - y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -4x - y = 6 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ -15x + 5y = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x - 4y = -2 \\ 45x - 5y = -18 \end{cases}$

Exercice 4.5

Résoudre les systèmes suivants

a) $\begin{cases} -2x + y = -1 \\ -10x + 5y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x - y = -20 \\ 2x - 2y = -16 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -3x - y = -10 \\ -x + 3y = -10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = -7 \\ 5x + 5y = -35 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -x + y = -8 \\ x + y = -2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} -12x - 4y = 32 \\ 2x - 2y = -160 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -x - 7y = 1 \\ x + 7y = -1 \end{cases}$

h) $\begin{cases} -2x - \frac{3}{2}y = \frac{11}{6} \\ -x - \frac{1}{6}y = -\frac{11}{6} \end{cases}$

i) $\begin{cases} -x + 8y = 68 \\ -3x + 7y = -85 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x - y = \frac{32}{5} \\ x - \frac{21}{5}y = -\frac{16}{5} \end{cases}$

k) $\begin{cases} \frac{1}{3}x + y = \frac{4}{5} \\ -x - 3y = -1 \end{cases}$

l) $\begin{cases} x + 3y = \frac{20}{3} \\ -5x + 5y = -60 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x + 4y = 99 \\ x + 5y = -22 \end{cases}$

n) $\begin{cases} -5x - 4y = 1 \\ 10x + 8y = -1 \end{cases}$

o) $\begin{cases} -x - y = -42 \\ -x + 5y = 66 \end{cases}$

p) $\begin{cases} -5x - 3y = 1 \\ \frac{9}{4}x + \frac{27}{20}y = -\frac{2}{5} \end{cases}$

q) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{7}y = \frac{1}{14} \\ x - \frac{1}{4}y = -\frac{1}{56} \end{cases}$

r) $\begin{cases} x + y = -5 \\ -4x + y = 25 \end{cases}$

Exercice 4.6

Une mule se plaignant d'être trop chargée dit à une ânesse « Si je te donnais un de mes sacs, nous en aurions autant l'une que l'autre ; et si tu m'en donnais un des tiens, j'en aurais le double de toi. » Combien de sacs les deux équidés transportent-ils ?

Exercice 4.7

Deux amis se partagent 43 billes de verre. Ils rencontrent ensuite un tiers à qui chacun offre 8 billes. L'un des amis possède alors le double de billes de l'autre. Combien chacun des amis avait-il reçu de billes lors du partage ?

Exercice 4.8

On range des pommes dans des caisses, en en mettant 525 par caisse. Si l'on avait mis 600 pommes par caisse, il aurait fallu une caisse de moins. Combien y a-t-il de pommes ?

Exercice 4.9

Le périmètre d'un terrain rectangulaire est égal à 450 m. La largeur est égale aux $\frac{3}{7}$ de sa longueur. Trouver les dimensions et l'aire de ce terrain en are.

Exercice 4.10

Amandine achète 2 croissants et 4 pains au chocolat pour 8 francs et 80 centimes. Sarah achète 7 croissants et 8 pains au chocolat pour 21 francs et 20 centimes. Quel est le prix d'un croissant et d'un pain au chocolat ?

Exercice 4.11

Une somme de 285 € est payée à l'aide de 37 billets de 10 € et 5 €. Combien y a-t-il de billets de chaque sorte ?

Exercice 4.12

Le périmètre d'un rectangle est de 144 mètres. La longueur du rectangle mesure 34 mètres de plus que sa largeur. Déterminer les dimensions du rectangle.

Exercice 4.13

On sait que 5 feutres et 7 stylo coûtent 23,20 francs et que 2 feutres et 6 stylos coûtent 16 francs. Calculer le prix d'un feutre et le prix d'un stylo.

Exercice 4.14

Comment peut-on payer la somme de 96 francs avec 30 pièces, les unes de 5 francs et les autres de 2 francs ?

Exercice 4.15

Un gymnase a un effectif de 525 élèves inscrits. Le 28% des garçons et le 40% des filles, soit 171 élèves, pratiquent un sport dans un club. Calculer le nombre de garçons et de filles inscrits dans ce gymnase.

Exercice 4.16

Un professeur souhaite organiser une sortie de classe. Il envisage deux destinations : Paris et Barcelone. Il calcule ensuite le coût de chaque voyage pour la classe entière.

a) Aller à Barcelone reviendrait à 14 400 francs, sachant que les moins de 16 ans payeraient 400 francs et les plus de 16 ans, 500 francs.

b) Par contre, aller à Paris ne coûterait que 11 100 francs, sachant que les moins de 16 ans payeraient 300 francs et les plus de 16 ans, 400 francs.

Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Exercice 4.17

Un objet composé d'un alliage d'or et de cuivre pèse 2 451 grammes. Son volume est de 165 cm^3. On sait que 1 cm^3 d'or pèse 19,5 grammes et que 1 cm^3 de cuivre pèse 9 grammes. Calculer le volume d'or et le volume de cuivre de cet objet. (On suppose que les volumes s'additionnent.)

Exercice 4.18

Un marchand de scooter vient de vendre deux scooters d'occasion pour la somme totale de 2 100 francs. Il a réalisé 10% de bénéfice sur la vente du premier scooter mais il a perdu 10% sur l'autre. Globalement, il a réalisé un bénéfice de 5%. Combien de francs avait-il acheté chacun des scooters ?

Exercice 4.19

Un train met 7 secondes pour passer devant un voyageur immobile sur le quai, et 25 secondes pour traverser entièrement une gare de 378 m de long. Quelle est la longueur x du train (en mètres) ? Et sa vitesse y (en km/h) ?

Exercice 4.20

Déterminer géométriquement la solution des systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 3x + y = 4 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x + y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5x + 2y = -5 \\ 6x - y = -6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -5x - y = 6 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 10x + 5y = 0 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -3x + y = 4 \end{cases}$

Exercice 4.21

Résoudre les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 7 \\ y - 3z = 10 \\ 5z = -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = -5 \\ -x + y - 4z = 1 \\ 3y - z = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - y - z = 3 \\ 3x + 4z = 20 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 4y - 2z = -12 \\ x + 2y - z = -4 \\ 3x + 5y + 3z = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + z = 3 \\ x + y - z = -3 \\ -x + y + z = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 15 \\ x + z = 2 \end{cases}$

Solutions

Solution 4.1

a) $(x; y) \in \{(-9; 14)\}$
b) $(x; y) \in \{(4; -16)\}$
c) $(x; y) \in \{(-14; -16)\}$
d) $(x; y) \in \{(-6; 10)\}$
e) $(x; y) \in \{(-74; -55)\}$
f) $(x; y) \in \{(7; -4)\}$

Solution 4.2

a) $(x; y) \in \{(\frac{1}{2}; \frac{5}{2})\}$
b) $(x; y) \in \{(14; 3)\}$
c) $(x; y) \in \{(\frac{7}{6}; \frac{11}{6})\}$
d) $(x; y) \in \{(\frac{29}{5}; \frac{3}{5})\}$
e) $(x; y) \in \{(\frac{3}{7}; -\frac{4}{7})\}$
f) $(x; y) \in \{(-\frac{6}{7}; -\frac{41}{7})\}$

Solution 4.3

a) $(x; y) \in \{(4; 28)\}$
b) $(x; y) \in \{(-46; -105)\}$
c) $(x; y) \in \{(3; -\frac{8}{5})\}$
d) $(x; y) \in \{(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})\}$
e) $(x; y) \in \{(\frac{73}{5}; \frac{72}{5})\}$
f) $(x; y) \in \{(-4; \frac{3}{2})\}$

Solution 4.4

a) Système impossible $(x; y) \in \emptyset$
b) Système indéterminé
c) Système indéterminé
d) Système impossible $(x; y) \in \emptyset$
e) Système impossible $(x; y) \in \emptyset$
f) Système indéterminé

Solution 4.5

a) Système indéterminé
b) $(x; y) \in \{(6; 14)\}$
c) $(x; y) \in \{(4; -2)\}$
d) Système indéterminé
e) $(x; y) \in \{(3; -5)\}$
f) $(x; y) \in \{(-22; 58)\}$
g) Système indéterminé
h) $(x; y) \in \{(\frac{4}{3}; -3)\}$
i) $(x; y) \in \{(68; 17)\}$
j) $(x; y) \in \{(\frac{47}{5}; 3)\}$
k) Système impossible $(x; y) \in \emptyset$
l) $(x; y) \in \{(\frac{32}{3}; -\frac{4}{3})\}$
m) $(x; y) \in \{(53; -15)\}$
n) Système impossible $(x; y) \in \emptyset$
o) $(x; y) \in \{(24; 18)\}$
p) Système impossible $(x; y) \in \emptyset$
q) $(x; y) \in \{(-\frac{8}{7}; \frac{9}{2})\}$
r) $(x; y) \in \{(-6; 1)\}$

Solution 4.6

La mule a 7 sacs et l'ânesse 5.

Solution 4.7

L'un en avait 26 et l'autre 17.

Solution 4.8

Il y a 4 200 pommes.

Solution 4.9

Dimension $157{,}5\,\mathrm{m} \times 67{,}5\,\mathrm{m}$, aire $10\;631{,}25\,\mathrm{m}^2 = 106{,}312\;5\,\mathrm{a}$

Solution 4.10
Un croissant coûte 1 franc et 20 centimes, un pain au chocolat 1 franc et 60 centimes.

Solution 4.11
Il y a 20 billets de 10 € et 17 billets de 5 €.

Solution 4.12
Sa largeur est de 19 mètres, sa longueur de 53 mètres.

Solution 4.13
Le prix d'un feutre est de 1,70 francs et celui d'un stylo de 2,10 francs.

Solution 4.14
On donne 12 pièces de 5 francs et 18 pièces de 2 francs.

Solution 4.15
Il y a 325 garçons et 200 filles dans ce gymnase.

Solution 4.16
Il y a 21 élèves de moins de 16 ans et 12 élèves de plus de 16 ans, soit 33 élèves en tout.

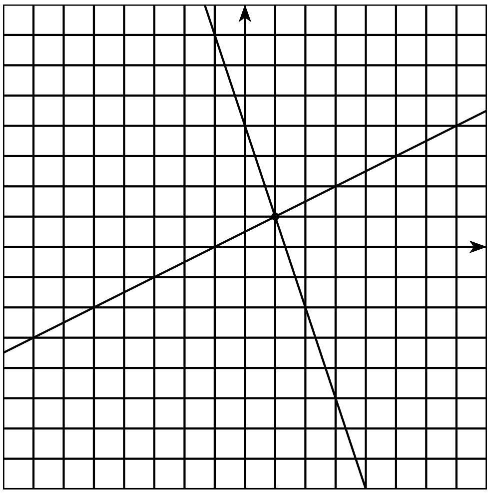
Solution 4.17
Le volume de l'or est de $92\,\text{cm}^3$ et celui du cuivre de $73\,\text{cm}^3$.

Solution 4.18
Le vendeur avait acheté 1 500 francs le premier scooter et 500 francs le second.

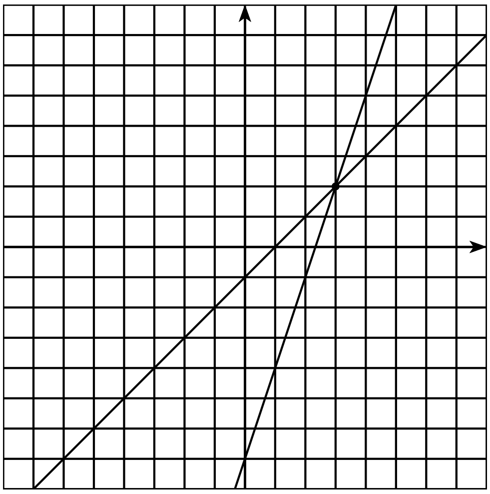
Solution 4.19
La longueur du train est de 147 mètres, sa vitesse de 21 m/s, soit 75,6 km/h.

Solution 4.20

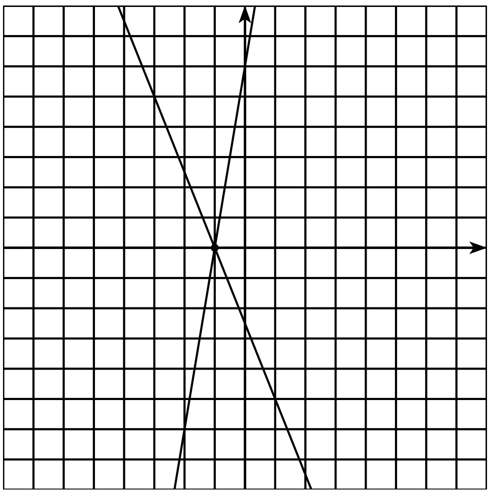
a)



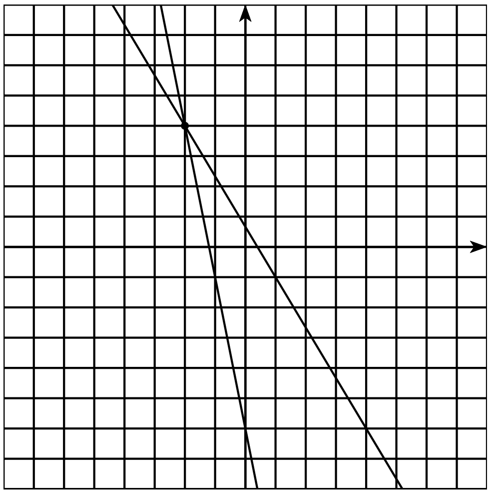
b)



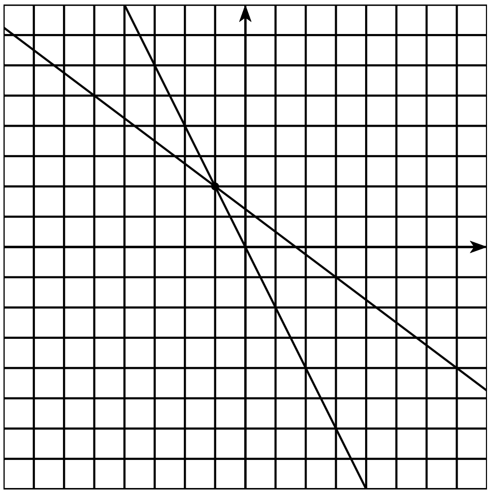
c)



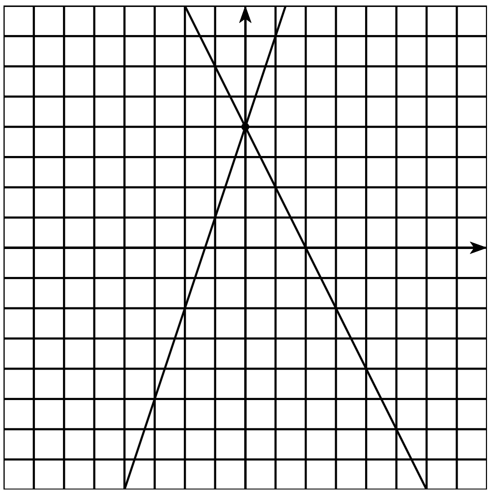
d)



e)



f)



Solution 4.21

a) $(x; y; z) = (-4; 1; -3)$

b) $(x; y; z) = (-2; 3; 1)$

c) $(x; y; z) = (4; 3; 2)$

d) $(x; y; z) = (2; -2; 2)$

e) $(x; y; z) = (-1; 2; 4)$

f) $(x; y; z) = (-5; 8; 7)$

5 Équations du deuxième degré

5.1 Formule générale

Définition
Une **équation du deuxième degré** est une équation qui peut être écrite sous la forme

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \text{ avec } a \neq 0$$

Définition
La **formule générale** permet de déterminer les solutions des équations du deuxième degré. Celles-ci sont données par

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}$$

où $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$.

Définition
Δ se dit **delta**. On l'appelle le **discriminant**.

Exemple
Résolvons l'équation $2\,x^2 - x - 3 = 0$

$a = \qquad , b = \qquad , c = \qquad \Rightarrow \Delta =$

$$x_1 = \frac{\quad + \sqrt{\quad}}{\qquad} = \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{\quad - \sqrt{\quad}}{\qquad} =$$

Selon la valeur du discriminant, il y a trois situations possibles :
si $\Delta > 0$, alors l'équation possède deux solutions (comme ci-dessus).
si $\Delta = 0$, alors l'équation ne possède qu'une solution ($x_1 = x_2$).
si $\Delta < 0$, alors l'équation ne possède **aucune** solution.

Exemple
Résolvons l'équation $4\,x^2 - 4\,x + 1 = 0$
$a = \qquad , b = \qquad , c = \qquad \Rightarrow \Delta =$

$$x_1 = x_2 = \frac{\quad \pm \sqrt{\quad}}{\qquad} =$$

Exemple
Résolvons l'équation $x^2 + 2\,x + 3 = 0$
$a = \qquad , b = \qquad , c = \qquad \Rightarrow \Delta =$
Donc l'équation ne possède pas de solution. En effet la $\sqrt{\text{nombre négatif}}$ n'est pas définie.

Il faut toujours ramener l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avant d'appliquer la formule.

Exemple
Résolvons l'équation $2\,x^2 - 2\,x + 5 = x^2 + 4$

5.2 Équations bicarrées

Définition
une **équation bicarrée** est une équation qui peut être écrite sous la forme

$$a\,x^4 + b\,x^2 + c = 0$$

À l'aide de la formule générale, on peut aussi résoudre des équations bicarrées. Pour ce faire, on introduit une nouvelle variable $u = x^2$ et on résout l'équation après l'avoir exprimée à l'aide de la nouvelle variable :

$$u = x^2 \Rightarrow x^4 = u^2 \Rightarrow a\,x^4 + b\,x^2 + c = a\,u^2 + b\,u + c$$

Donc on résout $a\,u^2 + b\,u + c = 0$.
Finalement, on déterminera les x correspondant aux u trouvés grâce à la formule générale.

Exemple
Résolvons l'équation $x^4 - 3\,x^2 - 4 = 0$. Introduisons $u = x^2 \Rightarrow x^4 = u^2$. Alors notre équation devient $u^2 - 3\,u - 4 = 0$.

$a = \quad , b = \quad , c = \quad \Rightarrow \Delta =$

$$u_1 = \frac{\quad + \sqrt{\quad}}{\quad} = \qquad \text{et} \qquad u_2 = \frac{\quad - \sqrt{\quad}}{\quad} =$$

Il reste à retrouver les x correspondant à u_1 :

$$x^2 = u_1 = \qquad \Rightarrow x =$$

Il n'y a pas de x correspondant à u_2, car $x^2 = u_2 = \qquad$, mais la $\sqrt{\text{nombre négatif}}$ n'est pas définie.

Cette équation bicarrée a donc deux solutions.

Il peut arriver qu'une équation bicarrée ait quatre, trois, deux, une ou zéro solutions.

5.3 Factorisation

La résolution d'équations du deuxième degré est toujours possible avec la formule générale. Cependant, il existe des méthodes de factorisation des polynômes qui permettent de gagner beaucoup de temps lors de cette résolution. Par ailleurs, ces techniques de factorisation et leurs extensions permettent de résoudre des équations de degré plus élevé que 2, contrairement à la formule générale.
Aux paragraphes 1.5 et 1.6, nous avons vu comment développer et réduire un produit. Le principe de la factorisation est de suivre le chemin inverse : à partir du résultat, il faut découvrir le point de départ, c'est-à-dire l'expression du produit avant sa réduction et son développement. Une factorisation est donc une sorte de devinette. Il est plus facile d'y répondre si on est bien entraîné à développer et réduire des produits.

Exemple
Factorisons $x^2 - 9$.

Quel produit a pu aboutir à ce résultat ?

Nous pouvons deviner, en nous souvenant de l'identité remarquable (au paragraphe 1.8)

$$A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$$

que ce résultat s'obtient en multipliant $x + 3$ par $x - 3$. Autrement dit,

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

Nous avons transformé notre expression de départ en un produit. Nous l'avons donc **factorisée**.

5.3.1 Factorisation par mise en évidence

Illustrons la mise en évidence par un exemple concret.

Voici une liste de courses pour préparer de délicieux brownies :

Liste de courses :

500 g de farine
500 g de sucre
200 g de chocolat
150 g de noix de pécan
1 sachet de poudre à lever

Si on veut préparer le double de brownies, on peut modifier la liste de deux manières :

Liste de courses :

2·500 g de farine
2·500 g de sucre
2·200 g de chocolat
2·150 g de noix de pécan
2·1 sachet de poudre à lever

Liste de courses :
(doubler toutes les quantités !)

500 g de farine
500 g de sucre
200 g de chocolat
150 g de noix de pécan
1 sachet de poudre à lever

Pour passer de la liste de gauche à la liste de droite, nous avons mis en évidence le facteur 2 qui était commun à chacun des termes de la liste. On procède de la même manière avec les polynômes : on cherche un facteur commun, puis on indique qu'il multiplie toute la liste.

Exemple
Factorisons $2 \cdot x + 4 \cdot y + 2 \cdot z$.

Le facteur commun est 2. L'expression factorisée s'écrit $2 \cdot (x + 2\,y + z)$. Nous pouvons vérifier que cette factorisation et correcte en effectuant le produit :

$$2 \cdot (x + 2\,y + z) = 2 \cdot x + 4 \cdot y + 2 \cdot z$$

C'est bien l'expression dont nous étions partis.

Exemple
Factorisons $x^2 + 3 \cdot x$.

Le facteur commun est x. L'expression factorisée s'écrit $x \cdot (x + 3)$. Nous pouvons vérifier que cette factorisation est correcte en effectuant le produit :

$$x \cdot (x + 3) = x^2 + 3 \cdot x$$

C'est bien l'expression dont nous étions partis.

5.3.2 Factorisation du trinôme unitaire (ou méthode Somme − Produit)

Effectuons le produit $(x+2)\cdot(x+3)$.
Par distributivité, nous obtenons :

$$(x+2)\cdot(x+3) = x^2 + 2\cdot x + 3\cdot x + 6 = x^2 + 5\cdot x + 6$$

La seconde étape est la réduction (nous avons additionné les termes de même type).
Nous pouvons remarquer que le terme constant (6) est le produit de 2 et de 3 et que le coefficient du terme de degré 1 (5) est la somme de 2 et de 3. Est-ce dû au hasard ?

Réessayons avec un autre produit : $(x+\quad)\cdot(x+\quad) = \qquad\qquad =$

Nous remarquons que :
- Terme constant :
- Coefficient du terme de degré 1 :

De manière générale, si on prend n'importe quels nombres $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, alors

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + \qquad + \qquad + \qquad = x^2 + (\quad + \quad)\cdot x +$$

Nous remarquons que :
- Terme constant :
- Coefficient du terme de degré 1 :

On en déduit une méthode de factorisation des polynômes de deuxième degré dont le coefficient du terme de degré 2 vaut 1 (ceux qu'on appelle les **trinômes unitaires**). La technique consiste à trouver deux nombres dont le produit donne le terme constant et dont la somme donne le coefficient du terme de degré 1. Pour cette raison, cette méthode de factorisation est parfois appelée la méthode **Somme − Produit**.

Exemple
Factorisons $x^2 - 5\,x + 4$. Le coefficient du terme de degré 2 vaut 1, nous pouvons donc utiliser la méthode du trinôme unitaire. Nous devons trouver deux nombres réels dont le produit vaut 4 (terme constant) et la somme vaut -5 (coefficient du terme de degré 1). Nous dressons donc une liste de paires de nombres dont le produit vaut 4 :

$1 \cdot 4$
$2 \cdot 2$
$(-1) \cdot (-4)$
$(-2) \cdot (-2)$

Nous déterminons ensuite quelle paire convient pour obtenir une somme de -5 :

La paire de nombres recherchée est -1 et -4.

Nous pouvons donc factoriser : $x^2 - 5\,x + 4 = (x - 1) \cdot (x - 4)$.

Pour vérifier que cette factorisation est correcte, nous effectuons le produit :

$$(x - 1) \cdot (x - 4) =$$

Exemple
Factorisons $x^2 + 3\,x - 10$.

— Produit :

— Somme :

La liste de paires de candidats :

La bonne paire :

Factorisation : $x^2 + 3\,x - 10 =$

Vérification :

$$(x \qquad) \cdot (x \qquad) = \qquad\qquad\qquad\qquad = x^2 + 3\,x - 10$$

5.3.3 Factorisation avec les identités remarquables

Rappelons ici les identités remarquables énoncées au paragraphe 1.8 :

Identités remarquables de degré 2

$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$

En utilisant ces identités remarquables de gauche à droite, nous développons et réduisons plus rapidement.

Exemple
Déterminons **sans machine** le carré de 29.

Remarquons tout d'abord que $29 = 30 - 1$.
Appliquons ensuite la deuxième identité remarquable :

$$29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2\cdot 30\cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$$

En utilisant ces identités remarquables de droite à gauche, nous pouvons factoriser.

Exemple
Factorisons $x^2 - 10\,x + 25$.

L'expression comporte trois termes. Donc, nous allons utiliser une des deux premières identités. Le signe "$-$" nous indique que la deuxième est appropriée.

Identifions termes à termes les membres de notre expression :

$A^2 = x^2 \Rightarrow A = x$ et $B^2 = 25 \Rightarrow B = 5$.

Il faut vérifier que, dans ces conditions, on a bien $-2\,A\,B = -10\,x$. Or $-2\,A\,B = -2\cdot x\cdot 5$.
C'est donc correct : $A = x$ et $B = 5$, et l'expression de départ se factorise

$$x^2 - 10\,x + 25 = (x-5)^2$$

5.4 Résolution d'équations par factorisation

L'objectif de la factorisation est de résoudre plus rapidement des équations du deuxième degré, voire de résoudre des équations de degré plus élevé.
Le raisonnement est le suivant : pour que le produit de deux facteurs soit nul, il faut qu'un des facteurs au moins soit nul. En effet :

$$0 \cdot \text{ un nombre réel } = \text{ un nombre réel } \cdot 0 = 0$$

Si on s'intéresse à un produit de plus de deux facteurs, on a toujours la condition qu'au moins un des facteurs est nul.

Exemple
Résolvons $(x+7)\cdot(x-6)\cdot(x+41)\cdot(x-\frac{1}{2})=0$

Pour que $(x+7)\cdot(x-6)\cdot(x+41)\cdot(x-\frac{1}{2})$ vaille zéro, il faut qu'un des facteurs au moins soit nul. Les solutions de l'équation à résoudre sont donc données par les valeurs de x qui annulent au moins un des facteurs.

$$\left.\begin{array}{lll} x+7 & =0 \Leftrightarrow & x=-7 \\ x-6 & =0 \Leftrightarrow & x=6 \\ x+41 & =0 \Leftrightarrow & x=-41 \\ x-\frac{1}{2} & =0 \Leftrightarrow & x=\frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Donc $(x+7)\cdot(x-6)\cdot(x+41)\cdot(x-\frac{1}{2})=0$
$\Leftrightarrow x=-7$ ou $x=6$ ou $x=-41$ ou $x=\frac{1}{2}$,
c'est-à-dire $S=\{-7;6;-41;\frac{1}{2}\}$.

Exemple
Résolvons $x^3-13\,x^2+42\,x=0$

Nous allons factoriser le membre de gauche, puis résoudre l'équation en suivant le même raisonnement que ci-dessus.
Premièrement, x est facteur commun. Nous pouvons donc le mettre en évidence.

$$x^3-13\,x^2+42\,x=x\cdot(x^2-13\,x+42)$$

Essayons d'appliquer ensuite la méthode Somme – Produit.

- Produit :
- Somme :

La liste de paires de candidats :

La bonne paire :

Factorisation : $x^2-13\,x+42=$

Donc $x^3-13\,x^2+42\,x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x \qquad)\cdot(x \qquad)=0$.

Alors $x=$ ou $x=$ ou $x=$, c'est-à-dire $S=\{\quad;\quad;\quad\}$.

5.5 Problèmes

Savoir résoudre une équation du deuxième degré permet de résoudre de nombreux problèmes.

Exemple

Le propriétaire d'une usine souhaite doubler la superficie du bâtiment en augmentant sa largeur et sa longueur du même nombre de mètres. Il demande de trouver les dimensions des parties à construire pour respecter cette contrainte. L'immeuble mesure actuellement 40 m par 60 m.

Appelons L la largeur actuelle de l'immeuble et l sa longueur. Nous savons que $L = 40$ et $l = 60$.

Nous voulons augmenter L et l du même nombre de mètres. Mais ce nombre est inconnu. C'est le nombre que nous devons déterminer. Appelons-le x. La nouvelle largeur de l'immeuble vaudra donc $40 + x$ et sa nouvelle longueur vaudra $60 + x$.

Il faut déterminer x pour que la superficie de la nouvelle usine soit le double de la superficie de l'actuelle. Calculons la superficie actuelle : $L \cdot l = 40 \cdot 60 = 2400$ m^2. Le nouvel immeuble aura donc une superficie de $2 \cdot 2400 = 4800$ m^2.

Nous devons donc résoudre l'équation $(40+x)\cdot(60+x) = 4800$ pour répondre à la question.

$(40 + x) \cdot (60 + x) = 4800 \Leftrightarrow 2400 + 40\,x + 60\,x + x^2 = 4800 \Leftrightarrow x^2 + 100\,x - 2400 = 0.$

Alors $\Delta = 19600$, donc $x_1 = \frac{-100+140}{2}$ et $x_2 = \frac{-100-140}{2}$, c'est-à-dire $x_1 = 20$ et $x_2 = -120$.

Cependant la valeur x_2 n'a aucun sens. En effet, puisque nous voulons augmenter la superficie de l'usine, nous ne pouvons pas diminuer ses dimensions.

Finalement, il faut augmenter de 20 mètres la largeur et la longueur du bâtiment pour en doubler la superficie. La nouvelle largeur vaudra 60 m et la nouvelle longueur vaudra 80 m.

Nous pouvons vérifier ce résultat : $(40 + 20) \cdot (60 + 20) = 60 \cdot 80 = 4800$ m^2, qui est bien le double de la surface de départ.

Exercices

Exercice 5.1

Résoudre

a) $x^2 - 7\,x + 10 = 0$
b) $2\,x^2 + 14\,x + 20 = 0$
c) $x^2 + x + 1 = 0$
d) $x^2 - 100 = 0$
e) $-2\,x^2 - 12\,x + 14 = 0$
f) $x^2 + 16 = 8\,x$
g) $x^2 - 3\,x = 0$
h) $x^2 + 3 = 0$
i) $x^2 - 3 = 0$
j) $5\,x^2 - 4\,x = 1$
k) $7\,x^2 + x + 2 = 0$
l) $3\,x^2 + 30\,x + 75 = 0$
m) $6\,x^2 + 5\,x + 1 = 0$

Exercice 5.2

Inventer une équation du deuxième degré

a) qui a deux solutions
b) qui n'a aucune solution
c) qui n'a qu'une seule solution

Exercice 5.3

Résoudre

a) $x^4 - 5\,x^2 + 4 = 0$
b) $x^4 + 5\,x^2 + 4 = 0$
c) $x^4 + x^2 - 6 = 0$
d) $x^4 - 100 = 0$
e) $x^4 - 25\,x^2 = 0$
f) $36\,x^4 + 13\,x^2 + 1 = 0$

Exercice 5.4

Factoriser par mise en évidence

a) $x^2 + x$
b) $5\,x + 10$
c) $3\,x^2 + 9\,x + 15$
d) $4\,(x+1) + 4\,(x+2)$
e) $12\,x^4 + 16\,x^3 - 20\,x^2 + 4\,x$
f) $7\,x \cdot (x+2) + 8\,x \cdot (x+2) + 9\,x \cdot (x+2)$
g) $(x+1) \cdot (x+4) + 3\,(x+1)$
h) $(x+4) \cdot (x+1) + (x+3) \cdot (x+1)$

Exercice 5.5

Factoriser par la méthode somme-produit

a) $x^2 + 7\,x - 18$
b) $x^2 - 3\,x - 18$
c) $x^2 - 17\,x + 72$
d) $x^2 + 13\,x + 42$
e) $x^2 - 8\,x + 15$
f) $x^2 - x - 56$
g) $x^2 - 5\,x - 24$
h) $x^2 + 2\,x - 24$

Exercice 5.6

Factoriser à l'aide des identités remarquables

a) $x^2 - 10\,x + 25$
b) $x^2 - 81$
c) $x^2 + 8\,x + 16$
d) $x^4 - 49$
e) $x^2 - 16\,x + 64$
f) $x^6 - 1$
g) $4\,t^2 + 24\,t + 36$
h) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
i) $81\,x^4 - 18\,x^2 + 1$
j) $z^4 - \frac{1}{625}$

Exercice 5.7

Factoriser

a) $x^2 - 20\,x + 100$
b) $x^2 - 12\,x + 32$
c) $4\,x^2 - 1$
d) $x^2 + 3\,x$
e) $x^2 - \frac{1}{100}$
f) $y^2 + 4\,y + 4$
g) $y^2 + 4\,y + 3$
h) $2\,x^2 + 2\,x$

Exercice 5.8

Factoriser au maximum

a) $x^3 + 10x^2 + 25\,x$
b) $x^4 - 81$
c) $2\,x^4 + 16\,x^3 + 32\,x^2$
d) $x^3 - 2\,x^2 - 8\,x$
e) $x^3 - 6\,x^2 + 9\,x$
f) $3\,x^3 - 75\,x$
g) $7\,x^4 - 35\,x^3 + 42\,x^2$
h) $8\,x^3 + 8\,x^2 + 3\,x + 3$

Exercice 5.9

Résoudre

a) $(x+3)\cdot(x-5) = 0$
b) $7\,(3\,x+9)\cdot(3\,x-1) = 0$
c) $(2-x)\cdot(1-4\,x)\cdot(8\,x+4)\cdot(x-100) = 0$
d) $5\,(x^2+9)\cdot(2\,x-1) = 0$
e) $(x^2 - \frac{1}{4})\cdot(x^2 + \frac{1}{9}) = 0$
f) $(x^2-2)\cdot(x+12) = 0$
g) $x\cdot(x-7)^8 = 0$
h) $(x-3)^2\cdot(x+8)^2 = 0$

Exercice 5.10

Inventer une équation du deuxième degré

a) qui a deux solutions
b) qui n'a aucune solution
c) qui n'a qu'une seule solution

Exercice 5.11

Résoudre par factorisation

a) $x^2 - 2x + 1 = 0$

b) $x^2 + 1 = 0$

c) $x^2 - x - 12 = 0$

d) $x^2 + x - 12 = 0$

e) $x^2 - \frac{1}{9} = 0$

f) $x^2 + 22x + 121 = 0$

g) $x^2 + 13x + 36 = 0$

h) $x^3 - 144x = 0$

Exercice 5.12

Résoudre par factorisation

a) $x^3 - 5x^2 + 6x = 0$

b) $2x^3 + 24x^2 + 72x = 0$

c) $x^4 - \frac{1}{81} = 0$

d) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

e) $4x^3 + 8x^2 + 4x = 0$

f) $x^3 - x = 0$

g) $(x+7) \cdot (x+3) + 5(x+7) = 0$

h) $x^8 - 16 = 0$

Exercice 5.13

Résoudre

a) $2x^3 + x^2 - x = 0$

b) $3x^2 + 39x + 120 = 0$

c) $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

d) $6x^3 + 14x^2 + 4x = 0$

e) $(x^2 + 9) \cdot (x^2 - 9) \cdot (4 - x) = 0$

f) $(5x^2 + 26x + 5) \cdot (x^2 - 15x + 50) = 0$

g) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

h) $8(x^2 - 8x + 7) + x \cdot (x^2 - 8x + 7) = 0$

Exercice 5.14

Une peinture et son cadre forment un rectangle de 90 cm par 120 cm. Sachant que l'aire du cadre est égale à l'aire de la toile peinte, trouver la largeur du cadre.

Exercice 5.15

Une page de 80 mm par 120 mm a une marge d'égale largeur partout. Sachant que le texte imprimé occupe les 5/8 de la page, trouver la largeur de la marge.

Exercice 5.16

La municipalité gère un parc de 240 mètres de long par 160 mètres de large et désire doubler sa superficie. Cet agrandissement devra se faire en conservant la forme rectangulaire. Pour ce faire, la municipalité envisage d'ajouter des bandes de terrain d'égale largeur sur une longueur et une largeur du parc existant. Calculer la largeur de ces bandes de terrain.

Exercice 5.17

Un terrain rectangulaire de 26 m sur 30 m est entouré d'un trottoir de largeur constante. Si l'aire du trottoir est de 240 m^2, quelle est sa largeur ?

Exercice 5.18

Le nombre d'or est le nombre positif noté ϕ dont le carré est égal à lui-même plus 1. Combien vaut-il ?

Exercice 5.19
Pierre lance une pierre horizontalement à une vitesse $v = 10$ m/s du haut d'un pont à 50 m au-dessus de l'eau. Quel temps faut-il pour que la pierre tombe dans l'eau ?

Données physiques :

— Un caillou lancé horizontalement a parcouru au bout de t secondes une distance x, exprimée en mètres par
$$x = 4,9\,t^2$$

Exercice 5.20
Pierre lance une pierre verticalement à une vitesse $v = 10$ m/s vers le haut, par dessus la barrière d'un pont à 50 m au-dessus de l'eau. Quel temps faut-il pour que la pierre tombe dans l'eau ?

Données physiques :

— Un caillou lancé verticalement à vitesse v dirigée vers le haut a parcouru au bout de t secondes une distance x, exprimée en mètres par
$$x = 4,9\,t^2 - v \cdot t$$

Pour aller plus loin

Exercice 5.21

Factoriser au maximum

a) $7\,x^3 + 14\,x^2 + 5\,x + 10$

b) $5\,x^3 + 2\,x^2 - 5\,x - 2$

c) $9\,t^3 - 4\,t^2 - 9\,t + 4$

d) $4\,x^3 + 4\,x^2 - x - 1$

e) $6\,x^3 - 8\,x^2 + 3\,x - 4$

f) $10\,x^3 - 3\,x^2 - 10\,x + 3$

g) $x^3 - x^2 - x + 1$

h) $x^6 - 25\,x^4 - x^2 + 25$

Exercice 5.22

Résoudre

a) $x^5 - 15\,x^3 + 54\,x = 0$

b) $28\,x^4 + 12\,x^3 - 7\,x^2 - 3\,x = 0$

c) $(x+3)\cdot(x-2) = (4-x)\cdot(x-2)$

d) $x^9 - 17\,x^5 + 16\,x = 0$

Exercice 5.23

On sait que la somme $1 + 2 + 3 + ... + x = \frac{x\cdot(x+1)}{2}$

a) Savez-vous le prouver ?

b) Jusqu'où faut-il faire la somme pour obtenir juste un peu plus qu'un million ?

Exercice 5.24

Pierre laisse tomber une pierre dans un puits et il entend, au bout de 3 secondes, un plouf. Quelle est la profondeur du puits ?

Données physiques :

— Un caillou en chute libre, lâché sans vitesse initiale, a parcouru au bout de t secondes une distance x, exprimée en mètres par

$$x = 4,9\,t^2$$

— La vitesse du son est de 340 mètres par seconde.

Exercice 5.25

Une ficelle de 89 cm est fixée à deux clous A et B distants de 65 cm.

a) On tend la ficelle jusqu'à un point C de sorte que le triangle ABC soit rectangle en A. Calculer les longueurs AC et BC.

b) On tend la ficelle jusqu'à un point C de sorte que le triangle ABC soit rectangle en C. Calculer les longueurs AC et BC.

Exercice 5.26

On doit partager une somme de 30000 francs entre un certain nombre de personnes. S'il y avait 4 personnes de moins, la part de chacune serait augmentée de 1250 francs. Combien sont-ils ?

Solutions

Solution 5.1

a) $S = \{2; 5\}$
b) $S = \{-2; -5\}$
c) $S = \emptyset$
d) $S = \{-10; 10\}$
e) $S = \{-7; 1\}$
f) $S = \{4\}$
g) $S = \{0; 3\}$
h) $S = \emptyset$
i) $S = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$
j) $S = \{-\frac{1}{5}; 1\}$
k) $S = \emptyset$
l) $S = \{-5\}$
m) $S = \{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\}$

Solution 5.2

Demandez à votre voisin de résoudre votre équation.

Solution 5.3

a) $S = \{-2; -1; 1; 2\}$
b) $S = \emptyset$
c) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
d) $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$
e) $S = \{-5; 0; 5\}$
f) $S = \{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\}$

Solution 5.4

a) $x \cdot (x + 1)$
b) $5\,(x + 2)$
c) $3\,(x^2 + 3\,x + 5)$
d) $4\,(2x + 3)$
e) $4\,x \cdot (3\,x^3 + 4x^2 - 5x + 1)$
f) $24\,x \cdot (x + 2)$
g) $(x + 1) \cdot (x + 7)$
h) $(x + 1) \cdot (2x + 7)$

Solution 5.5

a) $(x - 2) \cdot (x + 9)$
b) $(x + 3) \cdot (x - 6)$
c) $(x - 9) \cdot (x - 8)$
d) $(x + 6) \cdot (x + 7)$
e) $(x - 5) \cdot (x - 3)$
f) $(x - 8) \cdot (x + 7)$
g) $(x - 8) \cdot (x + 3)$
h) $(x + 6) \cdot (x - 4)$

Solution 5.6

a) $(x - 5)^2$
b) $(x + 9) \cdot (x - 9)$
c) $(x + 4)^2$
d) $(x^2 + 7) \cdot (x + \sqrt{7}) \cdot (x - \sqrt{7})$
e) $(x - 8)^2$

f) $(x^3+1)\cdot(x^3-1)=(x^3+1)\cdot(x-1)\cdot(x^2+x+1)$

g) $(2\,t+6)^2$

h) $(x-\frac{1}{2})^2$

i) $((3\,x-1)\cdot(3\,x+1))^2$

j) $(z^2+\frac{1}{25})\cdot(z+\frac{1}{5})\cdot(z-\frac{1}{5})$

Solution 5.7

a) $(x-10)^2$

b) $(x-4)\cdot(x-8)$

c) $(2\,x-1)\cdot(2\,x+1)$

d) $x\cdot(x+3)$

e) $(x-\frac{1}{10})\cdot(x+\frac{1}{10})$

f) $(y+2)^2$

g) $(y+1)\cdot(x+3)$

h) $2\,x\cdot(x+1)$

Solution 5.8

a) $x\cdot(x+5)^2$

b) $(x^2+9)\cdot(x-3)\cdot(x+3)$

c) $2\,x^2\cdot(x+4)^2$

d) $x\cdot(x-4)\cdot(x+2)$

e) $x\cdot(x-3)^2$

f) $3\,x\cdot(x+5)\cdot(x-5)$

g) $7\,x^2\cdot(x-2)\cdot(x-3)$

h) $(8\,x^2+3)\cdot(x+1)$

Solution 5.9

a) $S=\{-3;5\}$

b) $S=\{-3;\frac{1}{3}\}$

c) $S=\{2;\frac{1}{4};-\frac{1}{2};100\}$

d) $S=\{\frac{1}{2}\}$

e) $S=\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\}$

f) $S=\{-\sqrt{2};\sqrt{2};-12\}$

g) $S=\{0;7\}$

h) $S=\{3;-8\}$

Solution 5.10
Il suffit de partir de la forme factorisée, de la développer et de la réduire.

Solution 5.11

a) $S=\{1\}$

b) $S=\emptyset$

c) $S=\{-3;4\}$

d) $S=\{3;-4\}$

e) $S=\{-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\}$

f) $S=\{-11\}$

g) $S=\{-4;-9\}$

h) $S=\{0;-12;12\}$

Solution 5.12

a) $S = \{0; 2; 3\}$
b) $S = \{0; -6\}$
c) $S = \{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\}$
d) $S = \{0; 3; 4\}$
e) $S = \{-1; 0\}$
f) $S = \{-1; 0; 1\}$
g) $S = \{-8; -7\}$
h) $S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

Solution 5.13

a) $S = \{0; -1; \frac{1}{2}\}$
b) $S = \{-5; -8\}$
c) $S = \{-2; 2\}$
d) $S = \{-2; 0; -\frac{1}{3}\}$
e) $S = \{-3; 3; 4\}$
f) $S = \{-5; -\frac{1}{5}; 5; 10\}$
g) $S = \{-3; -2; 2; 3\}$
h) $S = \{-8; 1; 7\}$

Solution 5.14
La largeur du cadre est de 15 cm.

Solution 5.15
La largeur de la marge est de 10 mm.

Solution 5.16
La largeur des bandes est de 80 m.

Solution 5.17
La largeur du trottoir est de 2 m.

Solution 5.18
$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$

Solution 5.19
Le temps de chute est d'environ 3.19 secondes.

Solution 5.20
Le temps de chute est d'environ 4.37 secondes.

Solution 5.21

a) $(7\,x^2 + 5) \cdot (x + 2)$
b) $(5x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$
c) $(9\,t - 4) \cdot (t + 1) \cdot (t - 1)$
d) $(2\,x - 1) \cdot (2\,x + 1) \cdot (x + 1)$
e) $(2\,x^2 + 1) \cdot (3\,x - 4)$
f) $(10x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$
g) $(x + 1) \cdot (x - 1)^2$
h) $(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+5)\cdot(x-5)$

Solution 5.22

a) $S = \{-3; -\sqrt{6}; 0; \sqrt{6}; 3\}$
b) $S = \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{7}\}$
c) $S = \{\frac{1}{2}; 2\}$
d) $S = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$

Solution 5.23

a) Indication : On peut grouper le premier nombre de la liste avec le dernier, le deuxième avec l'avant dernier et ainsi de suite.
b) jusqu'à 1414

Solution 5.24
La profondeur du puits est de 40,65 mètres.

Solution 5.25

a) 20,76 et 68,24 cm.
b) 33 et 56 cm.

Solution 5.26
Il y a 12 personnes.

6 Manipulation de formules

Une formule mathématique donne un lien entre différentes quantités exprimées avec des lettres. On peut effectuer sur les équations exprimées avec des lettres les mêmes opérations que sur les équations exprimées avec des nombres.

Exemple
$E = m \cdot c^2$. En divisant par c^2 l'équation, on trouve m :

$$m = \frac{\quad}{\quad}$$

On peut aussi isoler le c^2 et en déduire c :

$$c^2 = \frac{\quad}{\quad} \Leftrightarrow c =$$

On procède comme si la lettre à exprimer était le x de l'équation et les autres lettres étaient des nombres. Pour isoler la variable désirée, il faut parfois recourir à des étapes, comme pour le carré ci-dessus ou lorsque la grandeur qui nous intéresse est au dénominateur.

Exemple
$\frac{1}{p_2} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p_1}$. Pour exprimer f, on isole d'abord $\frac{1}{f}$ puis on en déduit f :

$$\frac{1}{f} = \qquad\qquad \Leftrightarrow f = \frac{1}{\qquad\quad} \Longleftrightarrow f = \frac{1}{\quad} \Leftrightarrow f = \frac{\quad}{\quad}$$

Exercices

Exercice 6.1

Dans les formules de physique suivantes (cinématique), exprimer les variables proposées en fonction des autres :

a) $v = \dfrac{d}{t} \quad \Rightarrow \quad d = \ldots\ldots \qquad t = \ldots\ldots$

b) $v = a \cdot t + v_0 \quad \Rightarrow \quad a = \ldots\ldots \qquad t = \ldots\ldots$

c) $x = v \cdot t + x_0 \quad \Rightarrow \quad v = \ldots\ldots \qquad t = \ldots\ldots$

d) $x = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v \cdot t + x_0 \quad \Rightarrow \quad a = \ldots\ldots \qquad t = \ldots\ldots$

e) $v = \omega \cdot t \quad \Rightarrow \quad \omega = \ldots\ldots \qquad t = \ldots\ldots$

Exercice 6.2

Dans les formules de géométrie suivantes, exprimer les variables proposées en fonction des autres :

a) $S = \dfrac{b \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \ldots\ldots \qquad h = \ldots\ldots$

b) $S = \dfrac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2} \quad \Rightarrow \quad h = \ldots\ldots \qquad b_1 = \ldots\ldots$

c) $S = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad r = \ldots\ldots$

d) $V = \pi r^2 \cdot h \quad \Rightarrow \quad r = \ldots\ldots \qquad h = \ldots\ldots$

e) $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \quad r = \ldots\ldots$

Exercice 6.3

Dans les formules de calcul financier suivantes, exprimer les variables proposées en fonction des autres :

a) $I = C_0 \cdot t \cdot n \quad \Rightarrow \quad C_0 = \ldots\ldots \qquad n = \ldots\ldots$

b) $C = C_0 \cdot (1 + t \cdot n) \quad \Rightarrow \quad C_0 = \ldots\ldots \qquad t = \ldots\ldots$

c) $C = C_0 \cdot (1 + t)^n \quad \Rightarrow \quad C_0 = \ldots\ldots \qquad t = \ldots\ldots$

Exercice 6.4

Dans les formules de physique suivantes (électricité), exprimer les variables proposées en fonction des autres :

a) $F = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad q_1 = \ldots\ldots \qquad r = \ldots\ldots$

b) $P = R \cdot i^2 \quad \Rightarrow \quad R = \ldots\ldots \qquad i = \ldots\ldots$

c) $U = R \cdot i \quad \Rightarrow \quad R = \ldots\ldots \qquad i = \ldots\ldots$

d) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R = \ldots\ldots$

Solutions

Solution 6.1

a) $d = v \cdot t \qquad t = \dfrac{d}{v}$

b) $a = \dfrac{v - v_0}{t} \qquad t = \dfrac{v - v_0}{a}$

c) $v = \dfrac{x - x_0}{t} \qquad t = \dfrac{x - x_0}{v}$

d) $a = \dfrac{2\,(x - x_0 - v \cdot t)}{t^2} \qquad t = \dfrac{-v \pm \sqrt{v^2 - 2\,a \cdot (x_0 - x)}}{a}$

e) $\omega = \dfrac{v}{t} \qquad t = \dfrac{v}{\omega}$

Solution 6.2

a) $b = \dfrac{2\,S}{h} \qquad h = \dfrac{2\,S}{b}$

b) $h = \dfrac{2\,S}{b_1 + b_2} \qquad b_1 = \dfrac{2\,S}{h} - b_2$

c) $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$

d) $r = \sqrt{\dfrac{V}{\pi\,h}} \qquad h = \dfrac{V}{\pi\,r^2}$

e) $r = \sqrt[3]{\dfrac{3\,V}{4\,\pi}}$

Solution 6.3

a) $C_0 = \dfrac{I}{t \cdot n} \qquad n = \dfrac{I}{C_0 \cdot t}$

b) $C_0 = \dfrac{C}{1 + t \cdot n} \qquad t = \dfrac{\frac{C}{C_0} - 1}{n}$

c) $C_0 = \dfrac{C}{(1 + t)^n} \qquad t = \sqrt[n]{\dfrac{C}{C_0}} - 1$

Solution 6.4

a) $q_1 = \dfrac{k \cdot F \cdot r^2}{q_2} \qquad r = \sqrt{\dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{F}}$

b) $R = \dfrac{P}{i^2} \qquad i = \sqrt{\dfrac{P}{R}}$

c) $R = \dfrac{U}{i} \qquad i = \dfrac{U}{R}$

d) $R = \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

7 Trigonométrie

7.1 Comment se repérer sur la terre ?

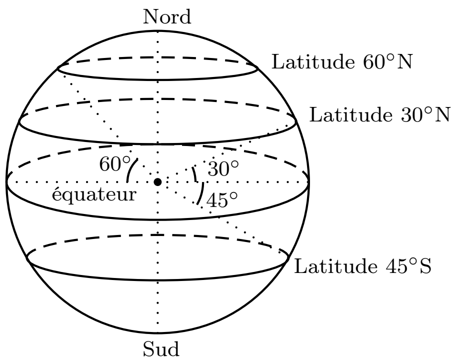
Définition
Le **degré**, unité de mesure d'angle, représente le $\frac{1}{360}$ d'un tour complet.

Pour pouvoir localiser un point sur la terre, on utilise les repères géographiques suivants :

Définition

La **latitude** est une valeur angulaire, expression du positionnement nord ou sud d'un point sur Terre.

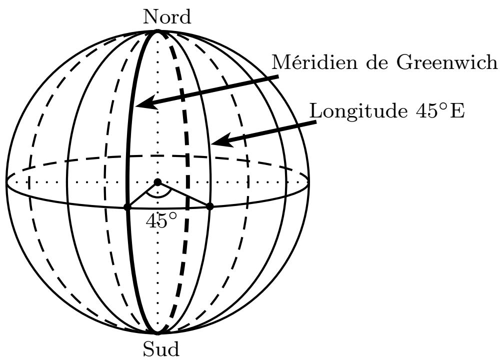
D'un point de vue mathématique, la latitude d'un point est l'angle au centre que forme la verticale en ce point avec le plan de l'Équateur.



Un **méridien** est un grand cercle imaginaire tracé sur le globe terrestre et passant par les pôles.

La **longitude** est une valeur angulaire, expression du positionnement est ou ouest d'un point sur Terre. Tous le points de même longitude appartiennent au même méridien.

À la différence de la latitude qui bénéficie de l'équateur et des pôles comme référence, aucune référence naturelle n'existe pour la longitude. La longitude est donc une mesure angulaire par rapport au méridien de Greenwich (l'observatoire royal de Londres), le méridien de référence, avec une valeur de 180° Est à 180° Ouest.



Pour définir un point précis sur Terre, il faut une mesure précise des angles, raison pour laquelle on utilise des sous-unités du degré. Comme cette unité de mesure a été inventée par les Babyloniens, les sous-unités sont basées sur la numération babylonienne, en base 60.

Un degré est subdivisé en 60 **minutes d'arc** (symbole $'$), elles-mêmes divisées en 60 **secondes d'arc** (symbole $''$) :

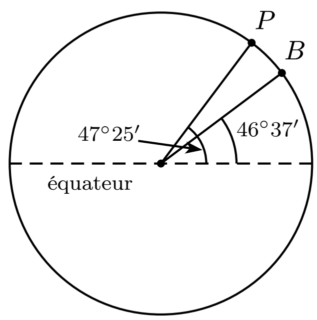
$$1' = \frac{1°}{60} \cong 0,0166° \quad \text{et} \quad 1'' = \frac{1°}{3600} \cong 0,000277°$$

Exemples

a) Bulle et Porrentruy se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont $46°37'$N et $47°25'$N.

Calculer la distance à vol d'oiseau entre ces deux villes.

Pour comprendre la situation, il faut représenter le méridien qui passe par ces deux villes.



L'angle entre Bulle et Porrentruy (sur le méridien) vaut $1°12' \cong 1,2°$.

Comme le rayon de la Terre vaut 6370 km, la longueur du méridien est de $2\pi \cdot 6370 = 42'285,8$ km et correspond à un angle de 360°.

Par une règle de trois, on en déduit que la distance entre Bulle et Porrentruy, à vol d'oiseau, vaut $\dfrac{42'485,8 \cdot 1,2}{360} \cong 141,62$ km.

b) On appelle **mille marin** la distance entre deux points d'un méridien terrestre dont la différence de latitude est de $1'$. Sachant que le rayon de la terre est de 6370 km, calculer la mesure en mètre d'un mille marin.

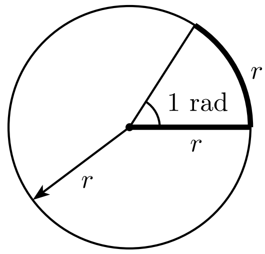
7.2 Le radian

Comme nous l'avons vu, la mesure d'un angle en degré représente $\frac{1}{360}$ d'un tour complet.

Il existe une autre unité de mesure des angles, qui permet, entre autres, de calculer facilement la longueur d'un arc de cercle ou l'aire d'un secteur circulaire :

Définition

L'angle au centre qui intercepte un arc de cercle de longueur égale au rayon mesure 1 **radian**.



Comme le périmètre d'un cercle de rayon r mesure $2\pi r$, l'angle au centre correspondant au cercle complet mesure 2π radians. Donc 2π correspond à un angle de 360°.

Le tableau suivant illustre la correspondance entre la mesure d'un angle en degré et celle en radian :

Mesure en degrés	360°	180°	90°	60°	1°	$d\,°$	$\frac{360}{2\pi} \cdot r°$
Mesure en radians	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{360}$	$\frac{2\pi}{360} \cdot d$	r

Exemples

a) Convertir les angles $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $\beta = \dfrac{3\pi}{2}$ et $\gamma = \dfrac{\pi}{6}$ de radians en degrés.

Comme un angle de mesure π radians correspond à 180°, un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ radians correspond à $\dfrac{180°}{4} = 45°$ par une règle de trois.

On peut également utiliser la formule du tableau ci-dessus : un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ radians correspond à un angle de $\dfrac{360}{2\pi} \cdot \dfrac{\pi}{4} = 45°$.

De même un angle de $\dfrac{3\pi}{2}$ radians équivaut à un angle de $\dfrac{3\cdot \qquad}{2} = \qquad°$.

Finalement, un angle de $\dfrac{\pi}{6}$ radians correspond à un angle de $\dfrac{\qquad}{\qquad} = \qquad°$.

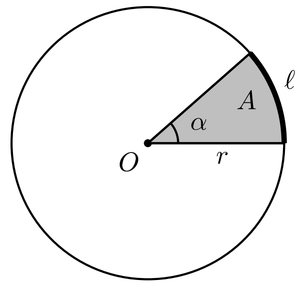
b) Convertir les angles $\alpha = 30°$, $\beta = 315°$ et $\gamma = 25°$ de degrés en radians.

Comme un angle de mesure 180° correspond à un angle de π radians, un angle de 30° correspond à un angle de $\dfrac{\pi}{6}$ radians par une règle de trois.

On peut également la formule du tableau ci-dessus : un angle de 30° correspond à un angle de $\dfrac{2\pi}{360} \cdot 30 = \dfrac{\pi}{6}$ radians.

De même,

7.2.1 Longueur d'un arc de cercle et aire d'un secteur circulaire



Considérons Γ un cercle de rayon r et de centre O, ainsi qu'un angle au centre α, qui intersecte Γ selon un arc de cercle de longueur ℓ.

Appelons A l'aire du secteur circulaire correspondant à l'angle α.

Si **l'angle α est exprimé en radian**, alors

$$\ell = r \cdot \alpha \quad \text{et} \quad A = \frac{r^2 \cdot \alpha}{2}$$

Exemples

a) Un marchand vend des tranches de pizza de deux types. La petite tranche est $\frac{1}{6}$ d'une pizza de 46 cm de diamètre et la grande tranche est $\frac{1}{8}$ d'une pizza de 66 cm de diamètre. Si la petite tranche est vendue 3 francs et la grande 4.50 francs, laquelle des deux tranches est-elle la plus avantageuse ?

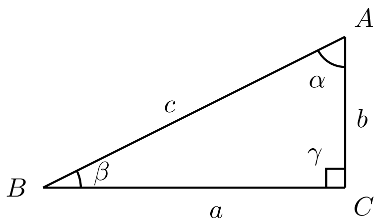
Il faut commencer par déterminer l'aire de ces deux tranches.
L'aire de la petite tranche vaut $A_1 = \dfrac{46^2 \cdot \frac{\pi}{3}}{2} \cong 1107.9 \text{ cm}^2$ car elle correspond à un ange de $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.
L'aire de la grande vaut $A_2 = \dfrac{66^2 \cdot \frac{\pi}{4}}{2} \cong 1710.6 \text{ cm}^2$ car elle correspond à un angle de $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.
Pour les comparer, regardons dans les deux cas, quelle quantité de pizza on obtient avec 1 franc. Pour la petite tranche, 1 franc correspond à $\dfrac{A_1}{3} \cong 369.3 \text{ cm}^2$ et pour la grande tranche, 1 franc correspond à $\dfrac{A_2}{4.5} \cong 380.1 \text{ cm}^2$ de pizza.
C'est donc la grande tranche la plus avantageuse.

b) Deux points situés sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de 1.5°. Quelle est la distance entre ces deux points, sachant que le rayon de la terre vaut 6370 km ?

7.3 Trigonométrie du triangle rectangle

Définition
Un **triangle rectangle** est un triangle qui possède un angle droit, c'est-à-dire un angle dont la mesure est 90°.

Dans cette section, nous utiliserons les notations suivantes :



avec l'angle droit en C : $\gamma = 90°$.
Ce triangle est dit **rectangle en** C.
Le côté c est appelé l'**hypothénuse**.

Propriétés

a) La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Donc si le triangle ABC est rectangle en C, on a
$$\alpha + \beta = 90°$$

b) Le théorème de Pythagore affirme que le triangle ABC est rectangle en C si et seulement si
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Exemples

a) Soit ABC un triangle rectangle en C, avec $\alpha = 30°$, $a = 8$ et $c = 10$. Résoudre ce triangle - ce qui signifie déterminer la mesure de tous les autres angles et côtés de ce triangle.

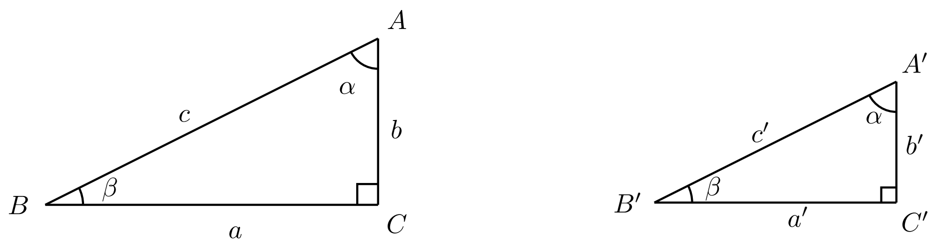
Comme $\alpha + \beta = 90°$, nous avons $\beta = 90° - 30° = 60°$.

Par le théorème de Pythagore, $8^2 + b^2 = 10^2$ donc $b^2 = 100 - 64 = 36$. Par conséquent, $b = 6$.

b) Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en C, avec $a = 9$. Résoudre ce triangle.

7.3.1 Définition des rapports trigonométriques

Deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal. Les côtés correspondants sont alors proportionnels :



Dans la figure ci-dessus, on suppose que $\alpha = \alpha'$ et $\gamma = \gamma'$ car le premier triangle est rectangle C et le deuxième est rectangle en C'. Alors

$$\beta = 90° - \alpha = 90° - \alpha' = \beta', \quad \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \quad \text{et} \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Le rapport des côtés ne dépend donc que de l'angle aigu, ce qui permet de définir les rapports trigonométriques suivants :

Définition
Soit ABC un triangle rectangle en C. Le **sinus**, le **cosinus** et la **tangente** de α sont définis par

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{mesure du côté opposé à } \alpha}{\text{mesure de l'hypothénuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{mesure du côté adjacent à } \alpha}{\text{mesure de l'hypothénuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{mesure du côté opposé à } \alpha}{\text{mesure du côté adjacent à } \alpha} = \frac{a}{b}$$

Exemples

a) Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC rectangle en C, sachant que $c = 6$ et $\cos(\alpha) = \frac{2}{3}$.

Comme $\frac{2}{3} = \cos(\alpha) = \frac{b}{6}$, il s'ensuit que $b = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Par le théorème de Pythagore, $a^2 = 36 - 16 = 20$, donc $a = \sqrt{20}$.

b) Soit ABC un triangle rectangle en A, tel que $b = 3$ et $b = c$. Déterminer l'angle α.

7.3.2 Relations fondamentales

Si α est un angle aigu, les trois relations suivantes sont vérifiées :

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

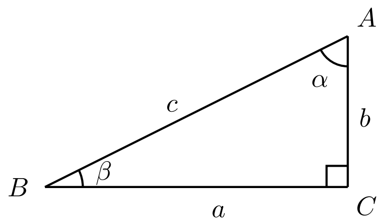
$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$$

où la notation $\sin^2(\alpha)$ signifie $(\sin(\alpha))^2$, et ainsi de suite.

Preuve de ces relations

a) Considérons le triangle suivant rectangle en C :



alors
$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}$

Par le théorème de Pythagore, $a^2 + b^2 = c^2$ donc cette fraction est égale à 1.

b) Comme $\sin(\alpha) = \dfrac{a}{c}$ et $\cos(\alpha) = \dfrac{b}{c}$, on a $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} =$

c)

Pour les exercices qui suivent, rappelons que le rayon de la Terre vaut 6370 km.

Exercice 7.1
Lausanne est à une latitude de $46°31'$ N. Calculer la distance, en suivant un méridien, entre

a) Lausanne et l'équateur,

b) Lausanne et le pôle nord,

c) Lausanne et le pôle sud.

Exercice 7.2
Sion et Délémont se trouvent sur le même méridien terrestre. Leur distance à vol d'oiseau est de 123 km. Sachant que la latitude de Sion est de $46°14'$ N, calculer la latitude de Délémont.

Exercice 7.3
Dunkerque et Barcelone se trouvent sur le même méridien terrestre. Leurs latitudes respectives sont $49°45'$ N et $40°15'$ N. Calculer la distance à vol d'oiseau entre ces deux villes.

Exercice 7.4
La distance à vol d'oiseau entre Lausanne et Genève est de 50 km. Quel est l'angle entre une verticale à Lausanne et une verticale à Genève ?

Exercice 7.5
Esquisser les angles suivants, donnés par leur mesure en radian :

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{2\pi}{5}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) 1 e) $2,5$ f) $4,7$

Exercice 7.6
Donner la valeur des angles suivants en radians :

a) $90°$ b) $270°$ c) $45°$ d) $135°$ e) $20°$ f) $120°$

Exercice 7.7
Donner la valeur des angles suivants en degrés :

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{7\pi}{9}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) 1 e) $\frac{7\pi}{8}$

Exercice 7.8
Calculer la mesure en degrés et en radians des angles au sommet des figures suivantes :

a) un triangle équilatéral,

b) un carré,

c) un pentagone régulier,

d) un hexagone régulier,

e) un n-gone régulier convexe.

Exercice 7.9

Quelle est la distance parcourue par l'extrémité de la grande aiguille, longue de 12 mm, d'une montre en

a) 5 minutes,

b) 14 minutes et 30 secondes,

c) 43 minutes et 17 secondes.

Exercice 7.10

La roue d'une locomotive a $4,575$ m de circonférence. Combien doit-elle faire de tours par seconde pour que sa vitesse soit de 48 km/h ?

Exercice 7.11

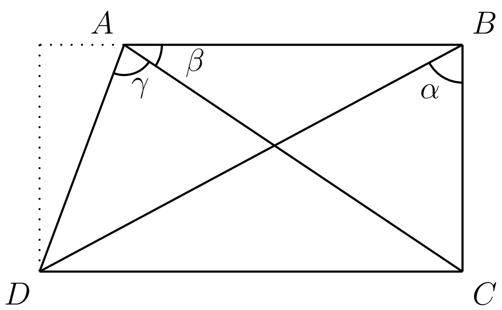
Quel est le trajet parcouru par un véhicule dont les roues, de $0,4$ m de rayon, ont effectué 1000 tours ?

Exercice 7.12

Une roue de voiture, de $0,85$ m de diamètre, fait 80 tours en 60 secondes. Quelle est la vitesse de la voiture en km/h ?

Exercice 7.13

Cet exercice est à faire avec la plus grande précision dans les mesures.
On considère le trapèze rectangle ci-dessous :



a) À l'aide de mesures de longueur effectuées sur la figure, donner les rapports $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$.

b) Mesurer l'angle α à l'aide d'un rapporteur, et calculer à la machine les rapports $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ et $\tan(\alpha)$. Comparer avec les valeurs obtenues en a).

c) À l'aide des mesures de longueur effectuées sur la figure et d'une calculatrice, déterminer les angles β et γ.

d) Mesurer au rapporteur les angles β et γ, puis comparer avec les valeurs obtenues en c).

Exercice 7.14

Compléter le tableau à l'aide d'une calculatrice :

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$19°$			
	$0,125$		
		$0,4$	
			2

Exercice 7.15

Calculer dans chaque cas l'inconnue :

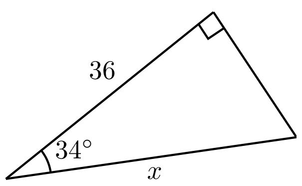
a) $\sin(27°) = \dfrac{3}{x}$ b) $\tan(\alpha) = \dfrac{8}{5}$ c) $\cos(79,5°) = \dfrac{a}{7}$

d) $\cos(\alpha) = \sin(50°)$ e) $\tan(24°) + \tan(x) = 1,35$

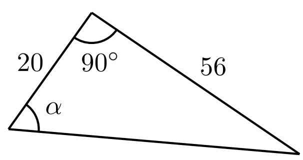
Exercice 7.16

Calculer l'élément inconnu dans chacune des figures :

a)



b)



Exercice 7.17

Résoudre les triangles ABC, rectangles en C, connaissant :

a) $\alpha = 27°$; $a = 7,8$ b) $a = 63$; $c = 92$

c) $\beta = 40°$; $c = 480$ d) $b = 7$; aire $= 12,5$

e) $\alpha = 67,5°$; $b = 26,3$ f) $a = 13,4$; $b = 20$

g) $\beta = 39,4°$; $a = 32$ h) $a = 5$; aire $= 6$

Exercice 7.18
Sachant que ABC est un triangle isocèle en A, compléter le tableau, où h_A et h_B désignent les hauteurs issues de A et B.

	α	β	a	b	h_A	h_B
a)			47		51	
b)			$9,3$			$7,8$
c)	$65°$			35		
d)		$72°$				$5,6$
e)		$29°$		$17,5$		
f)	$38°$		$23,4$			

Exercice 7.19
Quelle est la longueur de l'ombre d'un arbre vertical de 8 m de haut lorsque le soleil se trouve à 30° au-dessus de l'horizon ?

Exercice 7.20
Quelle est la hauteur d'un arbre vertical situé à une distance de 8 m, dont le sommet est visible sous un angle de 30° par rapport au sol (qui est horizontal) ?

Exercice 7.21
Une ficelle de 8 m est tendue entre le sol et le faîte d'un arbre. Elle fait avec le sol un angle de 30°. Quelle est la hauteur de l'arbre vertical et à quelle distance se trouve-t-il du point d'attache ?

Exercice 7.22
Une route s'élève régulièrement en formant avec l'horizontale un angle de $4,5°$. Quelle distance horizontale parcourt-on lorsqu'on a suivi la route sur $6,4$ km ? De combien s'est-on alors élevé ?

Exercice 7.23
Le Raidillon des Boveresses mesure 4 mm sur une carte au 1 : 25′000 et la différence d'altitude entre le bas et le haut est de 20 m.

a) Quelle en est sa pente ?
b) Quel angle fait-il avec l'horizontale ?
c) Quelle distance parcourt un cycliste en le gravissant ?

Exercice 7.24
Le funiculaire Territet-Glion possède une longueur de 637 m et une dénivellation de 300 m.

a) Quelle est la pente de ce funiculaire ?
b) Quel angle son tracé fait-il avec l'horizontale ?
c) Les roues du funiculaire ont 80 cm de diamètre, combien font-elles de tours en une montée ?

Exercice 7.25
Un escargot veut atteindre une salade (biologique) se trouvant à 2 m de là. Malheureusement, il fait une erreur de navigation et se trompe de $10°$ dans la direction à prendre. Après quelle distance la salade se trouvera-t-elle exactement à sa droite ? Combien de centimètres devra-t-il alors parcourir pour aller se régaler, s'il corrige sa promenade ?

Exercice 7.26
Un élastique est fixé horizontalement, légèrement tendu, entre les points A et C qui sont distants de 10 cm. On considère qu'il ne se déforme pas sous l'effet de son propre poids et qu'il est donc rectiligne. On suspend ensuite en B, au milieu de l'élastique, un objet qui a pour effet de l'allonger globalement de 6 cm. De quelle distance le point B descend-il sous l'effet du poids de l'objet ? Quel est l'angle entre les deux brins ?

Exercice 7.27
Un losange $ABCD$ est circonscrit à un cercle de rayon $R = 4$. Connaissant la diagonale $AC = 15$ du losange, calculer son côté, ses angles et sa diagonale BD.

Exercice 7.28
La voûte d'un tunnel est un arc de cercle dont l'angle au centre est égal à $230°$. Sachant que la largeur de la base du tunnel est de 11 m, calculer le rayon de l'arc du cercle ainsi que la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

Exercice 7.29

a) Soit un triangle ABC rectangle en A. On se donne la longueur $BC = 123$ cm et un angle de $18°$. Calculer l'aire de ce triangle.

b) Les côtés d'un rectangle mesurent respectivement 15 et 20 mètres. Calculer l'angle aigu formé par les diagonales.

c) La diagonale d'un rectangle mesure 100 m et l'angle qu'elle forme avec le plus long côté est de $24°$. Calculer l'aire de ce rectangle.

d) Calculer la longueur ℓ des côtés et l'aire d'un losange $ABCD$ connaissant l'angle $\widehat{BAD} = 35°$ et la longueur de la diagonale $AC = 7$ cm.

Pour aller plus loin

Exercice 7.30
En 230 av. J.-C., Erathostène calcula la circonférence de la Terre à l'aide des observations suivantes : à midi, le jour du solstice d'été, le soleil était à la verticale de Syène (aujourd'hui Assouan) tandis qu'il était incliné à $7,2°$ de la verticale à Alexandrie. Erathostène supposa que les deux villes avaient même longitude et que les rayons du soleil étaient parallèles. Il en déduisit que l'arc de méridien allant de Syène à Alexandrie était sous-tendu par un angle de $7,2°$ centré au centre de la Terre. La distance de Syène à Alexandrie était, à l'époque, estimée à $5'000$ stades. Sachant que 1 stade vaut environ $170,4$ mètres, calculer la circonférence de la Terre et le rayon terrestre. Vérifier que l'erreur d'Erathostène était d'environ 7%.

Exercice 7.31
On utilise une poulie de 1 m de diamètre pour soulever une charge.

a) De combien de mètres la charge est-elle soulevée lorsque la poulie tourne de 315°.
b) Si la charge est soulevée de 2 mètres, de quel angle la poulie a-t-elle tourné ?

Exercice 7.32

a) Calculer la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a.
b) Calculer la longueur de l'hypothénuse d'un triangle rectangle isocèle de cathète a.
c) Déduire de ce qui précède les valeurs exactes du sinus, du cosinus et de la tangente des angles de 45°, 30° et 60°.

Exercice 7.33
Un homme aperçoit un arbre sous un angle de $38,6°$. Il recule de 25 m et voit l'arbre sous un angle de $18,3°$ (on admettra que les yeux de l'observateur et le pied de l'arbre sont au même niveau). Quelle est la hauteur de l'arbre ? À quelle distance du pied de l'arbre l'observateur se trouvait-il au début ?

Solutions

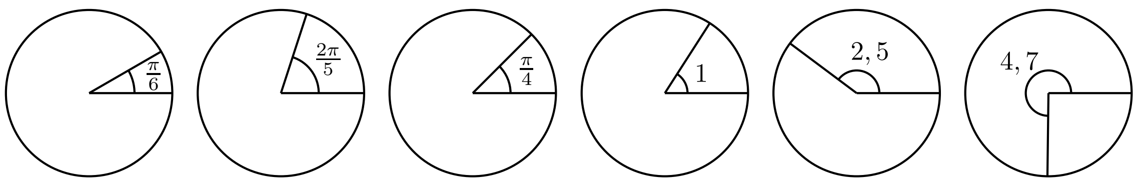
Solution 7.1
a) $5'171,61$ km b) $4'834,37$ km c) $15'177,6$ km

Solution 7.2
$47°20'$ N

Solution 7.3
$1056,19$ km

Solution 7.4
$0,47' = 28,26''$

Solution 7.5



Solution 7.6
a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{\pi}{9}$ f) $\frac{2\pi}{3}$

Solution 7.7
a) 120° b) 140° c) 45° d) $\frac{360}{2\pi}^{\circ}$ e) $157,15°$

Solution 7.8

a) $60° = \frac{\pi}{3}$
b) $90° = \frac{\pi}{2}$
c) $108° = \frac{3\pi}{5}$
d) $120° = \frac{2\pi}{3}$
e) $\frac{180(n-2)}{n}° = \frac{(n-2)\pi}{n}$

Solution 7.9

a) $6,28$ mm b) $18,22$ mm c) $54,39$ mm

Solution 7.10
$37,77$

Solution 7.11
$2513,27$ m

Solution 7.12
$0,989$ km/h ? ? ?

Solution 7.13
Il suffit de comparer les réponses obtenues en a) et b) et celles obtenues en c) et d) pour vérifier la précision des mesures.

Solution 7.14

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$19°$	$0,33$	$0,95$	$0,34$
$7,18°$	$0,125$	$0,99$	$0,13$
$66,42°$	$0,92$	$0,4$	$2,29$
$63,43°$	$0,89$	$0,45$	2

Solution 7.15

a) $6,61$ b) $57,99°$ c) $1,28$ d) 40 e) $42,14°$

Solution 7.16

a) $43,42$ b) $70,35°$

Solution 7.17

	α	β	a	b	c	aire
a)	$27°$	$63°$	$7,8$	$15,31$	$17,18$	$59,7$
b)	$43,22°$	$46,78°$	63	$67,04$	92	$2111,91$
c)	$50°$	$40°$	$367,7$	$308,54$	480	$56724,93$
d)	$27,03°$	$62,97°$	$3,57$	7	$7,86$	$12,5$
e)	$67,5°$	$22,5°$	$63,49$	$26,3$	$68,73$	$834,94$
f)	$33,82°$	$56,18°$	$13,4$	20	$24,07$	134
g)	$50,6°$	$39,4°$	32	$26,29$	$41,41$	$420,56$
h)	$64,36°$	$25,64°$	5	$2,4$	$5,55$	6

Solution 7.18

	α	β	a	b	h_A	h_B
a)	$49,48°$	$65,26°$	47	$56,15$	51	$42,69$
b)	$65,99°$	$57°$	$9,3$	$8,54$	$7,16$	$7,8$
c)	$65°$	$57,5°$	$37,61$	35	$29,52$	$31,72$
d)	$36°$	$72°$	$5,89$	$9,53$	$9,06$	$5,6$
e)	$122°$	$29°$	$30,61$	$17,5$	$8,48$	$14,84$
f)	$38°$	$71°$	$23,4$	$35,94$	$33,98$	$22,13$

Solution 7.19
$13,86$ m

Solution 7.20
$4,62$ m

Solution 7.21
La hauteur de l'arbre est de 4 m et la distance de $6,93$ m.

Solution 7.22
$6,38$ km et 502 m

Solution 7.23
a) 20% b) $11,3°$ c) $101,98$ m

Solution 7.24
a) $53,39$% b) $28,1°$ c) $53,5$

Solution 7.25
$2,02$ m et $35,27$ cm

Solution 7.26
$6,24$ cm et $77,36°$

Solution 7.27
$AB = 8,87$; $\alpha = 64,46°$; $\beta = 115,54°$; $BD = 9,46$

Solution 7.28
rayon : $6,07$ m et $h = 8,63$ m

Solution 7.29
a) $2223,15$ cm^2
b) $73,74°$
c) $3715,724$ m^2
d) $\ell = 3,67$ cm ; $7,725$ cm^2

Solution 7.30
Circonférence de la Terre : $42'600$ km ; rayon terrestre : $6'780$ km.
Valeur effective du rayon terrestre : $6'371$ km.

Solution 7.31
a) $2,75$ m
b) $229,2°$

Solution 7.32
a) $\frac{\sqrt{3}a}{2}$
b) $\sqrt{2}a$
c) $\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos(30°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos(60°) = \sin(30°) = \frac{1}{2}$

Solution 7.33
$h = 14,12$ m et $d = 17,68$ m

Bibliographie

Amaudruz S., Canapini S., Gaugaz D., Vlcek E., *Mathématiques 1C*, polycopié 2013

Bovet H., *Diplôme Tome 1*, polycopié

Javet J.-P., *Mathématiques 1C*, polycopié 2013-2016

Javet J.-P., *Mathématiques 2C*, polycopié 2015-2016

Faillétaz J.-M., Salvadore D., *Mathématiques ECGC 1ère année*, polycopié