

1 Rappel

1.1 Calculer la valeur numérique des expressions.

1) $\frac{4c}{a+b} + \frac{a}{b-c}$ avec $a = \frac{2}{3}$, $b = 2$ et $c = \frac{7}{3}$

2) $\frac{ab}{5} - \frac{3a-b}{4a-b}$ avec $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{5}{3}$

3) $\frac{1 - \frac{x-2y}{3}}{\frac{13x}{5} - 2,3}$ avec $x = 2$ et $y = 2,4$

4) $\frac{2x - \frac{y^2}{3}}{\frac{y}{x} - 2}$ avec $x = -\frac{2}{3}$ et $y = -4$

5) $\frac{\frac{2x-4}{3} - 2,6}{0,3 - \frac{2x^2}{25}}$ avec $x = -\frac{5}{2}$

6) $10^6 + \frac{a^3}{b} - \left(\frac{9a}{b}\right)^5$ avec $a = \frac{5}{3}$ et $b = \frac{3}{2}$

1.2 Étudier les suites de nombres et formuler une conjecture.

1) $a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2}$; $a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}$; $a_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$; ...

2) $b_1 = \frac{2}{1}$; $b_2 = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 3}$; $b_3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 3 \cdot 5}$; $b_4 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}$; ...

3) $c_1 = \frac{1}{2^2 - 1}$; $c_2 = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1}$; $c_3 = \frac{1}{2^2 - 1} + \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1}$; ...

1.3 Résoudre les équations.

1) $\frac{x}{4} + 0,943 = \frac{19}{10}x - 6,812$

2) $\frac{3x-1}{2} - \frac{4-x}{4} = 0$

3) $\frac{1}{8} \left(\frac{x}{10} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{40} (7x - 30)$

4) $\frac{x}{6} - \frac{2x-1}{6} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} - \frac{x}{3} \right)$

5) $\frac{4x-2}{3} - \frac{30x-5}{12} = \frac{1}{12} - \frac{5x}{4}$

6) $3(4(3+x) - (5x-4)) - (3-6x) = 0$

1.4 Résoudre les équations sans appliquer la formule générale.

$$\begin{array}{lll} 1) \ 5x^2 = 2x & 2) \ x^2 = 36 & 3) \ x^2 - 3x - 28 = 0 \\ 4) \ 9x^2 - 6x + 1 = 0 & 5) \ 4x^2 - 4x - 8 = 0 & 6) \ 3x^2 + 4x = 0 \\ 7) \ (x+3)^2 - 7(x+3) = 0 & 8) \ 2x^2 + 12 = 14x & 9) \ x^2 - 4 = x + 2 \end{array}$$

1.5 Résoudre les équations à l'aide de la formule.

$$\begin{array}{ll} 1) \ 8x^2 + 6x = 9 & 2) \ 2x^2 - x + 1 = 0 \\ 3) \ x^2 + 4 - 6x = 0 & 4) \ 9x^2 - 30x + 25 = 0 \\ 5) \ x^2 - 6x + 7 = 0 & 6) \ \frac{x^2 - 3}{2} - \frac{x^2 + 1}{3} = \frac{x^2 - 11}{6} \\ 7) \ x = \frac{2}{5} + \frac{5x^2}{16} & 8) \ \frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(x-3)^2}{4} = 0 \end{array}$$

1.6 Résoudre les systèmes.

$$\begin{array}{ll} 1) \ \begin{cases} \frac{x+2y-4}{4} = x-1 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{y-2}{2} = \frac{x}{4} + \frac{y}{3} \end{cases} & 2) \ \begin{cases} (2x+1)(y-2) = 2xy \\ x(3y-2) - 3y(x-1) + 4 = 0 \end{cases} \\ 3) \ \begin{cases} 3,6x + 4,7y - 14,3 = 0 \\ 2,4x + 1,9y - 6,82 = 0 \end{cases} & 4) \ \begin{cases} 7x - 5 = 6y + 3 \\ y + 7x = 7y + 12 \end{cases} \\ 5) \ \begin{cases} \frac{x-2}{5} - \frac{10-x}{3} = \frac{y-10}{4} \\ \frac{x+13}{4} + \frac{2x+y}{8} = \frac{2y+4}{3} \end{cases} & 6) \ \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \end{array}$$

1.7 La somme des deux chiffres dont se compose un nombre vaut 9. Si l'on retranche 3 de chacun d'eux, le nombre qu'ils forment vaut la moitié du nombre primitif, diminuée de 6. Quel est ce nombre ?

1.8 Une mère a aujourd'hui 6 fois l'âge de sa fille ; dans 5 ans, elle sera 3,5 fois aussi âgée que cette dernière. Quel est l'âge actuel de la mère ?

1.9 Un nombre de six chiffres commence à gauche par le chiffre 1. Si l'on met ce chiffre le dernier à droite, le nombre qu'on obtient est le triple du nombre primitif. Quel est ce nombre ?

- 1.10** Un cylindre qui mesure 10 cm de haut est composé de bois de masse volumique $0,6 \text{ kg/dm}^3$ et d'aluminium de masse volumique $2,7 \text{ kg/dm}^3$. Déterminer la hauteur des parties en bois et en aluminium de manière à obtenir un corps qui complètement immergé reste en équilibre dans l'eau.
- 1.11** Un piéton part de A vers B à une vitesse de 5 km/h . Il est parti depuis 3 heures quand un cycliste part de A se dirigeant également vers B, à une vitesse de 17 km/h . Après combien de temps rejoindra-t-il le piéton ?
- 1.12** On observe que $48 \cdot 42 = 84 \cdot 24$ et $24 \cdot 21 = 42 \cdot 12$. Quelle condition doivent satisfaire deux couples de nombres de deux chiffres pour vérifier la propriété qui se dégage de ces exemples ? Donner quelques exemples.
- 1.13** On considère un nombre de trois chiffres et on forme un nouveau nombre en l'écrivant deux fois de suite (par exemple : 683 683). Démontrer que ce dernier nombre est divisible par 7, 11, 13, et que son quotient par $7 \cdot 11 \cdot 13$ est égal au nombre initial.

Réponses

- 1.1** 1) $\frac{3}{2}$ 2) $-\frac{1}{9}$ 3) $\frac{2}{3}$
 4) $-\frac{5}{3}$ 5) 28 6) $\frac{72 \cdot 900 \cdot 250}{81}$
- 1.2** 1) $a_n = \frac{n}{n+1}$ 2) $b_n = 2^n$ 3) $c_n = \frac{n}{2n+1}$
- 1.3** 1) $S = \{\frac{47}{10}\}$ 2) $S = \{\frac{6}{7}\}$ 3) $S = \{5\}$
 4) $S = \{\frac{3}{5}\}$ 5) $S = \{4\}$ 6) $S = \{-15\}$
- 1.4** 1) $S = \{0; \frac{2}{5}\}$ 2) $S = \{-6; 6\}$ 3) $S = \{-4; 7\}$
 4) $S = \{\frac{1}{3}\}$ 5) $S = \{-1; 2\}$ 6) $S = \{-\frac{4}{3}; 0\}$
 7) $S = \{-3; 4\}$ 8) $S = \{1; 6\}$ 9) $S = \{-2; 3\}$
- 1.5** 1) $S = \{-\frac{3}{2}; \frac{3}{4}\}$ 2) $S = \emptyset$ 3) $S = \{3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}\}$
 4) $S = \{\frac{5}{3}\}$ 5) $S = \{3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}\}$ 6) $S = \mathbb{R}$
 7) $S = \{\frac{8-4\sqrt{2}}{5}; \frac{8+4\sqrt{2}}{5}\}$ 8) $S = \{7 - 2\sqrt{5}; 7 + 2\sqrt{5}\}$
- 1.6** 1) $S = \{(2; 3)\}$ 2) $S = \{(-1; -2)\}$ 3) $S = \{(\frac{11}{10}; \frac{11}{5})\}$

$$4) S = \emptyset$$

$$5) S = \{(7; 10)\}$$

6) système indéterminé

1.7 54

1.8 30 ans

1.9 142 857

1.10 Les parties en bois et en aluminium mesurent respectivement $\frac{17}{21}$ dm = $\frac{170}{21}$ cm
et $\frac{4}{21}$ dm = $\frac{40}{21}$ cm.

1.11 1 h 15 min

1.12 Si a et b désignent les deux chiffres du premier nombre, et c et d ceux du second nombre, on doit avoir l'égalité $a c = b d$.

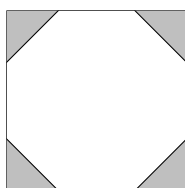
- 1.14** Diophante était un remarquable mathématicien grec du III^e siècle. On rapporte que sur sa tombe, il était écrit :

Ci-gît Diophante. Les chiffres diront la durée de sa vie. Sa douce enfance en fait le sixième, puis un douzième de sa vie a passé et son menton s'est recouvert de duvet. Marié, il a vécu le septième de sa vie sans enfant, puis cinq ans ont passé et la naissance d'un fils l'a rendu heureux. Le sort a voulu que la vie de ce fils soit deux fois plus courte que celle de son père. Plein de tristesse, le vieillard a rendu l'âme quatre ans après la mort de son fils.

Quel âge avait Diophante lorsque la mort l'a enlevé ?

- 1.15** On partage 840 noix entre des enfants. Si chacun reçoit 2 noix de moins, sa part est égale au nombre d'enfants. Combien y a-t-il d'enfants ?

1.16



On désire couper tous les « coins » d'un carré de 30 cm de côté, de manière à obtenir un octogone régulier. Quelle sera la longueur d'un côté de l'octogone ?

- 1.17** Trouver les dimensions des triangles rectangles suivants :
- 1) Le périmètre mesure 48 m et les cathètes sont proportionnels aux nombres 3 et 4.
 - 2) Le périmètre mesure 110 m et l'un des cathètes 10 m.
- 1.18** Chercher les dimensions de deux cubes, sachant que la différence de leurs volumes est de 39 500 cm³ et que l'arête de l'un mesure 20 cm de moins que celle de l'autre.
- 1.19** Deux chandeliers comprenant respectivement quatre et neuf bougies sont installés dans une très grande cave. La distance qui les sépare est de 10 m. Déterminer sur la droite qui les joint le point également éclairé par l'une ou l'autre des sources lumineuses. (On sait que l'intensité de la lumière diminue proportionnellement au carré de la distance.)
- 1.20** Pour un corps lancé verticalement vers le haut en l'absence de résistance de l'air, la relation entre la hauteur atteinte h , la vitesse initiale v_0 , l'accélération de la pesanteur g (9,81 m/s²) et le temps t , est la suivante :

$$h = v_0 t - g \frac{t^2}{2}$$

Un ballon est lancé verticalement vers le haut à la vitesse de 24,5 m/s.

- 1) Dans combien de temps aura-t-il atteint une hauteur de 24,5 m au-dessus du sol ?
- 2) Dans combien de temps retombera-t-il sur le sol ?

1.21 Le mensonge de Lord Ashby

Nous étions installés à la table d'une auberge. Hercule Poirot allumait une des minuscules cigarettes qu'il affectionnait.

— Hastings, faisons le point sur ce que nous savons de cette affaire, dit Poirot avec l'horrible accent franco-belge qui le caractérisait.

— Ce sera vite fait, Poirot. Ce jour-là, vers 17 heures, Lord Ashby avait reçu la visite de la victime, Miss Hasboume, une ancienne maîtresse, à son bureau de Londres.

La secrétaire de Lord Ashby a cru entendre quelques éclats de voix durant l'entrevue. Elle nous a déclaré par ailleurs que Lord Ashby avait quitté son bureau à 19 heures très précises, comme il le fait chaque jour. Miss Hasboume a pris le train de 18 h 55 pour Epsom où elle est descendue à 19 h 14. C'est sur le trajet entre la gare d'Epsom et son domicile, dans une rue déserte, qu'elle a été abattue d'une balle en plein cœur.

Selon Lady Ashby, son mari est arrivé ce soir-là dans leur manoir de Guilford très exactement à 19 h 56. Lord Ashby, de son côté, nous a déclaré qu'il roulait généralement à une certaine vitesse moyenne, toujours la même, à l'exception du lundi soir où sa vitesse moyenne était plus lente de 10 miles par heure très précisément, et du vendredi soir où sa vitesse moyenne était plus rapide d'exactly 8 miles par heure, par rapport à celle des mardi, mercredi et jeudi soir.

Toujours selon Lord Ashby, le lundi soir, il arrive chez lui à 19 h 56, les mardi, mercredi et jeudi à 19 h 50 et le vendredi soir à 19 h 45. Ajoutons que ce crime a eu lieu un lundi soir.

Pendant mon récit des faits, j'observai Poirot qui griffonnait quelques calculs sur la nappe de papier.

— L'ami actuel de Miss Hasboume est un des soi-disant journalistes d'une de ces feuilles à scandales, dit Poirot. Il est probable que tous deux faisaient chanter Lord Ashby, que sa position à la Chambre expose à toutes les campagnes de dénigrement. Mon cher Hastings, tous les renseignements que nous avons nous prouvent que Lord Ashby est un maniaque de l'heure et des horaires. Or il nous a menti, précisément sur les horaires et les vitesses moyennes. C'est là le signe indéniable qu'il a quelque chose à nous cacher.

— Je ne vois vraiment pas où vous avez pu déceler un mensonge dans les déclarations de Lord Ashby, m'étonnai-je.

Soient x la distance en miles entre le bureau et le domicile de Lord Ashby et v sa vitesse moyenne en miles par heure les mardi, mercredi et jeudi.

- 1) Exprimer en fonction de v la vitesse moyenne le lundi et le vendredi.
- 2) Déterminer en fonction de x et v les durées du trajet les mardi, mercredi, jeudi, lundi et vendredi.
- 3) En déduire $\frac{x}{v} = \frac{5}{6}$, $\frac{x}{v+8} = \frac{3}{4}$ et $\frac{x}{v-10} = \frac{14}{15}$.
- 4) En déduire x , puis v . Conclure.

Réponses

1.14 84 ans

1.15 28 enfants

1.16 La longueur d'un côté de l'octogone mesure $30(\sqrt{2} - 1)$ cm.

1.17 1) 12 m, 16 m et 20 m 2) 10 m, $\frac{99}{2}$ m et $\frac{101}{2}$ m

1.18 Les arêtes des deux cubes mesurent respectivement 15 cm et 35 cm.

1.19 Le point est à 4 m du chandelier à 4 bougies, c'est-à-dire à 6 m du chandelier à 9 bougies.

1.20 1) 3,61 s 2) 4,99 s