1.2 1) $a_1 = \dfrac{1}{1\cdot 2} = \dfrac{1}{2}$

$$a_2 = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}}_{a_1} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}}_{a_2} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4}}_{a_3} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

On peut supposer que $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2) $b_1 = \dfrac{2}{1} = 2$

$$b_2 = \frac{3\cdot 4}{1\cdot 3} = \frac{4}{1} = 4 = 2^2$$

$$b_3 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 3\cdot 5} = \frac{4\cdot 2}{1} = 8 = 2^3$$

$$b_4 = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} = \frac{2\cdot 8}{1} = 16 = 2^4$$

On s'attend à ce que $b_n = 2^n$.

3) $c_1 = \dfrac{1}{2^2-1} = \dfrac{1}{4-1} = \dfrac{1}{3}$

$$c_2 = \underbrace{\frac{1}{2^2-1}}_{c_1} + \frac{1}{4^2-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{16-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$$

$$c_3 = \underbrace{\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1}}_{c_2} + \frac{1}{6^2-1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{36-1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$$

$$c_4 = \underbrace{\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1}}_{c_3} + \frac{1}{8^2-1} = \frac{3}{7} + \frac{1}{64-1} = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}$$

On imagine que $c_n = \dfrac{n}{2\,n+1}$.

On remarque en effet que les numérateurs forment la suite d'entiers consécutifs $1, 2, 3, 4, \ldots$ et que les dénominateurs constituent la suite d'entiers impairs consécutifs $3, 5, 7, 9, \ldots$