

2 Factorisation

2.1 Mettre en évidence les facteurs communs.

- 1) $2a^3b^2 + 8a^3b^3 - 6a^4b$
- 2) $3ab(bc)^3 - ab(bc)^2$
- 3) $4x^ny^m + 2x^{n+2}y^{m+2}$
- 4) $5x^{n-1}y^{m+1} + 10x^ny^m + 25x^{n+1}y^{m-1}$
- 5) $3x^{n+2}y^{m+2} + 6x^ny^m - 18x^{n-2}y^{m-2}$
- 6) $2a^{m+n}b^{m-n} + 4a^mb^m + 8a^{m-n}b^{m+n}$

Produits remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^2 + b^2$ n'est pas factorisable	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2.2 Factoriser à l'aide des produits remarquables :

- 1) $a^2 - 9$
- 2) $4 - x^2$
- 3) $a^2 - 1$
- 4) $b^2 - 4a^2$
- 5) $-25a^2 + x^2$
- 6) $a^2 + 2a + 1$
- 7) $x^2 - 6x + 9$
- 8) $9x^2 - 12x + 4$
- 9) $a^2 + 4ab + 4b^2$
- 10) $1 - x^2$
- 11) $a^2b^2 - m^2$
- 12) $100a^2 - 64b^2$
- 13) $16a^2 - x^2y^2$
- 14) $x^4 - y^2$
- 15) $x^4 - 6x^2 + 9$
- 16) $1 + 2x^2 + x^4$
- 17) $4a^2 + 9b^2 - 12ab$
- 18) $4x^2 + 4x^4 + 1$
- 19) $-144 + b^2c^2$
- 20) $4a^4 - 9b^2$
- 21) $9a^2x^4 - 16b^2$
- 22) $a^2 - 9b^2c^4$
- 23) $16a^2 - 1$
- 24) $a^4 + 9b^2 - 6a^2b$
- 25) $9x^4 + 16y^2 + 24x^2y$
- 26) $1 + x^6 - 2x^3$
- 27) $4x^2y^2 - 20xy + 25$

2.3 Factoriser à l'aide des produits remarquables :

- 1) $a^3 - 8$
- 2) $8a^3 - b^3$
- 3) $x^3 - 1$
- 4) $a^3 + 1$
- 5) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$
- 6) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$
- 7) $8x^3 - 27$
- 8) $x^3y^3 - 1$
- 9) $1 - 64a^3$
- 10) $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$
- 11) $8a^3 + 36a^2b + 27b^3 + 54ab^2$
- 12) $a^3 - 8b^3c^6$
- 13) $64a^6 + 144a^4 + 27 + 108a^2$
- 14) $x^9 - 1$
- 15) $125x^6 + 8$

Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

Soit le polynôme du deuxième degré $ax^2 + bx + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

– Si $\Delta > 0$, alors il existe deux zéros x_1 et x_2 et on peut factoriser :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

– Si $\Delta = 0$, alors il existe un seul zéro x_1 et on peut aussi factoriser :

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

– Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de zéro réel et le polynôme $ax^2 + bx + c$ est indécomposable.

Exemple Le polynôme $12x^2 + 11x - 5$ admet deux zéros $x_1 = -\frac{5}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{3}$.
Donc $12x^2 + 11x - 5 = 12\left(x + \frac{5}{4}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 4\left(x + \frac{5}{4}\right)3\left(x - \frac{1}{3}\right) = (4x + 5)(3x - 1)$.

2.4 Factoriser les trinômes suivants :

1) $x^2 - x - 132$

2) $-y + y^2 - 12$

3) $x^2 + 12 - 8x$

4) $2x^2 + 9x + 7$

5) $2x^2 - 2x - 24$

6) $6x^2 + 15x + 6$

7) $27x^2 - 75x + 48$

8) $4x^2 + x - 5$

9) $11x^2 + 28x - 15$

10) $x^6 + 7x^3 + 12$

11) $x^4 - 3x^2 - 4$

12) $x^5 - 5x^3 + 4x$

Méthode par groupements

On peut mettre en évidence non seulement un nombre ou un monôme (comme à l'exercice 2.1), mais aussi un polynôme :

$$(x + 3)^2 - 7(x + 3) = (x + 3)((x + 3) - 7) = (x + 3)(x - 4)$$

Parfois, un double changement de signes est nécessaire à la mise en évidence :

$$\begin{aligned}(a - b)(x + y) - 2(b - a)(x - 5y) &= (a - b)(x + y) + 2(a - b)(x - 5y) = \\(a - b)((x + y) + 2(x - 5y)) &= (a - b)(3x - 9y) = 3(a - b)(x - 3y)\end{aligned}$$

2.5 Mettre en évidence les facteurs communs.

1) $(2a + 3b)(2x + y) + (3a + 5b)(2x + y)$

2) $(a + b)^2 + x(a + b)$

3) $(x - 2y)(a - b) - (b - a)(2x + y)$

4) $(4a - 2b)(2x - 3y) + (3y - 2x)(b - 2a)$

5) $3(2a - b)(4x - 5) - (2x + 1)(b - 2a)$

6) $a(a + b) - b(a + b) + (a + b)^2$

7) $a^2(x - 1)(a + b) + a^3(1 - x)$

8) $(x - 3)(x + 1) - (x - 3) + 2(x - 3)^2$

La méthode par groupements procède par mises en évidence partielles, avant de pouvoir mettre en évidence un polynôme :

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 12 = (x^3 + 3x^2) + (4x + 12) = x^2(x+3) + 4(x+3) = (x+3)(x^2+4)$$

2.6 Factoriser par la méthode des groupements :

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $ax + bx + ay + by$ | 2) $a + b + ax + bx$ |
| 3) $ax - by - ay + bx$ | 4) $a - bx + b - ax$ |
| 5) $ax - 4x + 4y - ay$ | 6) $ax + x - a - 1$ |
| 7) $a^3 + a^2 + a + 1$ | 8) $x^3 + x - x^2 - 1$ |
| 9) $a^3 + 2a - a^2 - 2$ | 10) $2a^4 - 3 - 2a^3 + 3a$ |
| 11) $a^2x - bx + a^2y^3 - by^3$ | 12) $6x^2 + xy + 18xz + 3yz$ |
| 13) $15y^2 - 5yz - 6y + 2z$ | 14) $20xy + 4y - 5x - 1$ |
| 15) $10xz - 10z - x^2 + x$ | 16) $6x^2 - 5xz - 6x + 5z$ |
| 17) $1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ | 18) $y^3 - y - y^2 + 1$ |
| 19) $x^2 + xy + xz + yz$ | 20) $x^3 + 3y^3 + 3x^2y + xy^2$ |
| 21) $xy - zy + xu - zu - xz + z^2$ | 22) $x^2 - xy + xz - x + y - z$ |
| 23) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ | 24) $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ |

2.7 Factoriser :

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1) $x^3 + 2x^2 + x$ | 2) $2a^6 - 6a^4 + 6a^2 - 2$ |
| 3) $9a^3 - ab^2$ | 4) $54a^6 - 2$ |
| 5) $1 - (x - y)^2$ | 6) $(x^2 - 1)^2 + 4x^2$ |
| 7) $xy - 9x^3y$ | 8) $a(a + c) - b(b + c)$ |
| 9) $x^4 + 3x^3 - 8x - 24$ | 10) $a^2(a - 1)^2 - (a - 1)^2(a - 3)^2$ |
| 11) $b^3 - a^3$ | 12) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$ |
| 13) $a^8 - 256$ | 14) $x(1 - y + x) - y$ |
| 15) $a^8 - 2a^4 + 1$ | 16) $x^4y^3 + 3x^3y^2 + 3x^2y + x$ |
| 17) $(x - 3)^2 - (x^2 - 9)$ | 18) $16a^4 + 2ab^3$ |
| 19) $8x^3 + 6x + 12x^2 + 1$ | 20) $a^4 + 4a^2b + 4b^2$ |
| 21) $a^3 - 3 + 3a - a^2$ | 22) $(a - b)^2 - 4(a - b)$ |
| 23) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$ | 24) $a^2x^2 - b^2x^2 - a^2y^2 + b^2y^2$ |
| 25) $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$ | 26) $2a^3b - a^2b^2 - 2ab + b^2$ |

$$27) x^6 y^3 + x^4 y^2 - x^2 y - 1$$

$$28) x^3 + 7x^2 + 6x$$

2.8 Factoriser :

$$1) a^6 - 2a^3 + 1$$

$$2) 10xz - 10z - x^2 + x$$

$$3) 2a - 8a^3 + 8a^5$$

$$4) 4x^2 y^2 - 20xy + 25$$

$$5) x^2 - 22x + 85$$

$$6) x^4 y^3 + 3x^3 y^2 + 3x^2 y + x$$

$$7) a^8 - 2a^4 + 1$$

$$8) (x^2 + 1)^2 - 4x^2$$

$$9) 6x^2 + xy + 18xz + 3yz$$

$$10) x^6 - 1$$

$$11) (x^2 + 1)^2 - 4x^2$$

$$12) 18x^4 - 2(x^2 - 1)^2$$

$$13) x^4 y^3 + 3x^3 y^2 + 3x^2 y + x$$

$$14) a^4 + 2a^3 - 2a - 1$$

$$15) (x^2 - 1)^2 - (x + 1)(x - 1)^3$$

$$16) 4x^2 y^2 - (z^2 - y^2 - x^2)^2$$

$$17) x^2 - 2xy + y^2 - 1$$

$$18) x^3 y + 6x^2 y + 9xy$$

$$19) x(x - 2)^2 + (x^3 - 8) - 3(x^2 - 4)$$

$$20) 4(a + b)^3 - 4(a - b)^3$$

$$21) x^3 y + 7x^2 y + 6xy$$

$$22) x^4 y - 2x^3 y^2 + 2xy^4 - y^5$$

$$23) a^8 - 256$$

$$24) a^8 - 2a^4 + 1$$

$$25) x^6 - x^4 - 16x^2 + 16$$

$$26) x^7 - x^4 - x^3 + 1$$

$$27) (3x^2 - 7)^2 - (x^2 - 2x + 5)^2$$

$$28) (3x^2 + 4x - 5)^2 - (5x^2 - 4x + 3)^2$$

2.9 Résoudre les équations par factorisation :

$$1) (x + 1)(x^2 - 4) = 3(x - 2)(x + 1) \quad 2) x^3 + x^2 = 4x + 4$$

$$3) x^4 + 4 = 5x^2$$

$$4) 9x^2 - (2x + 5)^2 = 0$$

$$5) 2(x^2 - 9) = x + 3$$

$$6) x^3 = x^2$$

$$7) x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$$

$$8) x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$9) x^5 - 2x^4 = x - 2$$

$$10) x^3 - 2x^2 - 3x = 0$$

$$11) x^8 + 9x^4 - 10 = 0$$

$$12) 4x^3 - 4x^2 + x = 0$$

2.10 Résoudre les équations par factorisation :

$$1) (2x^2 + 3x + 1)^2 - (2x^2 - 4x - 1)^2 = 0$$

$$2) 2x(x - 1) = x(2x + 7)$$

$$3) (2x - 7)(5x + 3) = 8(4x^2 - 49)$$

$$4) (3x + 5)(x^2 - 1) = (2x - 7)(1 - x^2)$$

$$5) (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = x(4 - x^2)(4 - x)$$

$$6) \ x^3 - 1 + 3(x^2 - 1) = 15(1 - x) - 5(x - 1)^2$$

- 2.11** Démontrer : le produit de deux nombres pairs consécutifs est un multiple de 8.
- 2.12** Démontrer : une personne retranche de son année de naissance la somme des chiffres qui la constituent ; elle obtient toujours un nombre divisible par 9.
- 2.13** Démontrer : la différence entre un nombre de quatre chiffres et ce nombre lu à l'envers est divisible par 9.
- 2.14** Démontrer : la somme de trois nombres entiers consécutifs est divisible par 3.
- 2.15** Démontrer : le carré d'un nombre impair diminué d'une unité est un multiple de 8.
- 2.16** Soit un entier naturel n se terminant par 5 et compris entre 10 et 100. Pour calculer n^2 , on peut utiliser le procédé suivant : multiplier le chiffre des dizaines par le nombre entier suivant et écrire 25 à la suite du résultat obtenu. Par exemple : $25^2 = 625$, car $2 \cdot 3 = 6$.
Démontrer la légitimité de ce procédé qui est valable pour tout entier se terminant par 5.
- 2.17** Démontrer : tout nombre entier de la forme $25n^4 + 50n^3 - n^2 - 2n$ est divisible par 24.
- 2.18** Démontrer : $n^3 - n$ est divisible par 6 pour tout nombre entier n .
- 2.19** Démontrer : si trois nombres réels ont une somme nulle, alors la somme de leurs cubes est égale au triple de leur produit.

Réponses

- 2.1** 1) $2a^3b(b + 4b^2 - 3a)$ 2) $ab^3c^2(3bc - 1)$
 3) $2x^ny^m(2 + x^2y^2)$ 4) $5x^{n-1}y^{m-1}(y^2 + 2xy + 5x^2)$
 5) $3x^{n-2}y^{m-2}(x^4y^4 + 2x^2y^2 - 6)$ 6) $2a^{m-n}b^{m-n}(a^{2n} + 2a^nb^n + 4b^{2n})$
- 2.2** 1) $(a + 3)(a - 3)$ 2) $(2 + x)(2 - x)$ 3) $(a + 1)(a - 1)$

- 4) $(b + 2a)(b - 2a)$ 5) $(x + 5a)(x - 5a)$ 6) $(a + 1)^2$
 7) $(x - 3)^2$ 8) $(3x - 2)^2$ 9) $(a + 2b)^2$
 10) $(1 + x)(1 - x)$ 11) $(ab + m)(ab - m)$ 12) $4(5a + 4b)(5a - 4b)$
 13) $(4a + xy)(4a - xy)$ 14) $(x^2 + y)(x^2 - y)$ 15) $(x^2 - 3)^2$
 16) $(x^2 + 1)^2$ 17) $(2a - 3b)^2$ 18) $(2x^2 + 1)^2$
 19) $(bc + 12)(bc - 12)$ 20) $(2a^2 + 3b)(2a^2 - 3b)$ 21) $(3ax^2 + 4b)(3ax^2 - 4b)$
 22) $(a + 3bc^2)(a - 3bc^2)$ 23) $(4a + 1)(4a - 1)$ 24) $(a^2 - 3b)^2$
 25) $(3x^2 + 4y)^2$ 26) $(x - 1)^2(x^2 + x + 1)^2$ 27) $(2xy - 5)^2$

- 2.3** 1) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$ 2) $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$
 3) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ 4) $(a + 1)(a^2 - a + 1)$
 5) $(a + 2)^3$ 6) $(a - 1)^3$
 7) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9)$ 8) $(xy - 1)(x^2y^2 + xy + 1)$
 9) $(1 - 4a)(1 + 4a + 16a^2)$ 10) $(2a + 1)^3$
 11) $(2a + 3b)^3$ 12) $(a - 2bc^2)(a^2 + 2abc^2 + 4b^2c^4)$
 13) $(4a^2 + 3)^3$ 14) $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$
 15) $(5x^2 + 2)(25x^4 - 10x^2 + 4)$

- 2.4** 1) $(x - 12)(x + 11)$ 2) $(y - 4)(y + 3)$ 3) $(x - 6)(x - 2)$
 4) $(x + 1)(2x + 7)$ 5) $2(x - 4)(x + 3)$ 6) $3(x + 2)(2x + 1)$
 7) $3(x - 1)(9x - 16)$ 8) $(x - 1)(4x + 5)$ 9) $(x + 3)(11x - 5)$
 10) $(x^3 + 4)(x^3 + 3)$ 11) $(x - 2)(x + 2)(x^2 + 1)$
 12) $x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$

- 2.5** 1) $(2x + y)(5a + 8b)$ 2) $(a + b)(a + b + x)$
 3) $(a - b)(3x - y)$ 4) $3(2a - b)(2x - 3y)$
 5) $14(2a - b)(x - 1)$ 6) $2a(a + b)$
 7) $a^2b(x - 1)$ 8) $3(x - 3)(x - 2)$

- 2.6** 1) $(x + y)(a + b)$ 2) $(a + b)(x + 1)$ 3) $(a + b)(x - y)$
 4) $(a + b)(1 - x)$ 5) $(a - 4)(x - y)$ 6) $(a + 1)(x - 1)$
 7) $(a + 1)(a^2 + 1)$ 8) $(x^2 + 1)(x - 1)$ 9) $(a - 1)(a^2 + 2)$
 10) $(a - 1)(2a^3 + 3)$ 11) $(a^2 - b)(x + y^3)$ 12) $(6x + y)(x + 3z)$
 13) $(5y - 2)(3y - z)$ 14) $(5x + 1)(4y - 1)$ 15) $(x - 1)(10z - x)$
 16) $(x - 1)(6x - 5z)$ 17) $(1 + x^2)(1 + y^2)$ 18) $(y - 1)^2(y + 1)$
 19) $(x + y)(x + z)$ 20) $(x^2 + y^2)(x + 3y)$ 21) $(x - z)(y + u - z)$

- 22) $(x-1)(x-y+z)$ 23) $(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$
 24) $(1-x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$

2.7

- | | |
|---------------------------------|------------------------------|
| 1) $x(x+1)^2$ | 2) $2(a-1)^3(a+1)^3$ |
| 3) $a(3a+b)(3a-b)$ | 4) $2(3a^2-1)(9a^4+3a^2+1)$ |
| 5) $(1+x-y)(1-x+y)$ | 6) $(x^2+1)^2$ |
| 7) $xy(1+3x)(1-3x)$ | 8) $(a-b)(a+b+c)$ |
| 9) $(x+3)(x-2)(x^2+2x+4)$ | 10) $3(a-1)^2(2a-3)$ |
| 11) $(b-a)(b^2+ba+a^2)$ | 12) $(x+2y)^3$ |
| 13) $(a-2)(a+2)(a^2+4)(a^4+16)$ | 14) $(x-y)(x+1)$ |
| 15) $(a^2+1)^2(a-1)^2(a+1)^2$ | 16) $x(xy+1)^3$ |
| 17) $-6(x-3)$ | 18) $2a(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$ |
| 19) $(2x+1)^3$ | 20) $(a^2+2b)^2$ |
| 21) $(a^2+3)(a-1)$ | 22) $(a-b)(a-b-4)$ |
| 23) $(a+b)^2(a-b)^2$ | 24) $(x-y)(x+y)(a+b)(a-b)$ |
| 25) $(x^2+9)(x-3)$ | 26) $b(2a-b)(a+1)(a-1)$ |
| 27) $(x^2y-1)(x^2y+1)^2$ | 28) $x(x+1)(x+6)$ |

2.8

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $(a-1)^2(a^2+a+1)^2$ | 2) $(x-1)(10z-x)$ |
| 3) $2a(2a^2-1)^2$ | 4) $(2xy-5)^2$ |
| 5) $(x-5)(x-17)$ | 6) $x(xy+1)^3$ |
| 7) $(a-1)^2(a+1)^2(a^2+1)^2$ | 8) $(x-1)^2(x+1)^2$ |
| 9) $(y+6x)(3z+x)$ | 10) $(x-1)(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ |
| 11) $(x+1)^2(x-1)^2$ | 12) $2(2x+1)(2x-1)(2x^2+1)$ |
| 13) $x(xy+1)^3$ | 14) $(a-1)(a+1)^3$ |
| 15) $2(x-1)^2(x+1)$ | 16) $(x-y+z)(-x+y+z)(x+y+z)(x+y-z)$ |
| 17) $(x-y+1)(x-y-1)$ | 18) $xy(x+3)^2$ |
| 19) $(x-2)^2(2x+1)$ | 20) $8b(3a^2+b^2)$ |
| 21) $xy(x+1)(x+6)$ | 22) $y(x-y)^3(x+y)$ |
| 23) $(a-2)(a+2)(a^2+4)(a^4+16)$ | 24) $(a^2+1)^2(a-1)^2(a+1)^2$ |
| 25) $(x+2)(x-2)(x^2+4)(x+1)(x-1)$ | 26) $(x^2+1)(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)$ |

$$27) \quad 4(2x+1)(x-1)(x+3)(x-2) \quad 28) \quad -4(2x-1)(2x+1)(x-2)^2$$

- 2.9**
- | | | |
|------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 1) $S = \{-1; 1; 2\}$ | 2) $S = \{-2; -1; 2\}$ | 3) $S = \{-2; -1; 1; 2\}$ |
| 4) $S = \{-1; 5\}$ | 5) $S = \{-3; \frac{7}{2}\}$ | 6) $S = \{0; 1\}$ |
| 7) $S = \{-2; -1; 1\}$ | 8) $S = \{1\}$ | 9) $S = \{-1; 1; 2\}$ |
| 10) $S = \{-1; 0; 3\}$ | 11) $S = \{-1; 1\}$ | 12) $S = \{0; \frac{1}{2}\}$ |
- 2.10**
- | | | |
|---|--------------------------------|--|
| 1) $S = \{-\frac{2}{7}; 0; \frac{1}{4}\}$ | 2) $S = \{0\}$ | 3) $S = \{-\frac{53}{11}; \frac{7}{2}\}$ |
| 4) $S = \{-1; \frac{2}{5}; 1\}$ | 5) $S = \{\frac{1}{2}; 2; 4\}$ | 6) $S = \{-7; -2; 1\}$ |

- 2.20** Montrer que la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est impaire.
- 2.21** Soit x un nombre entier. Démontrer que le nombre $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$ est divisible par 24.
- 2.22** Soit x un nombre entier.
- 1) Démontrer que le nombre $x^5 - 5x^3 + 4x$ est divisible par 120.
 - 2) Démontrer que le nombre $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ est divisible par 6.
- 2.23**
- 1) Factoriser $(x^2 + 3x + 1)^2 - 1$.
 - 2) En déduire que le produit de quatre entiers successifs non nuls n'est jamais le carré d'un nombre entier.
 - 3) Soit x un entier relatif non nul. Montrer que $x(x+2)$ n'est jamais le carré d'un nombre entier.
- 2.24** Platon et Archimède avaient trouvé deux méthodes pour déterminer des triangles rectangles dont la longueur de chaque côté est égale à un nombre entier d'unités. Voici ces deux méthodes.
- 1) Soit $x > 1$ un entier. On considère un triangle rectangle dont les longueurs des cathètes sont respectivement égales à $2x$ et $x^2 - 1$. Montrer que la longueur de l'hypoténuse de ce triangle est égale à un nombre entier.
 - 2) Soit $x > 1$ un entier. On considère un triangle rectangle dont les longueurs des cathètes sont respectivement égales à $2x + 1$ et $2x^2 + 2x$. Montrer que la longueur de l'hypoténuse de ce triangle est égale au nombre entier $2x^2 + 2x + 1$.
 - 3) En utilisant les méthodes 1) et 2), déterminer un triangle rectangle ayant trois côtés de longueur entière
 - (a) et dont une des cathètes est de longueur 23 ;
 - (b) et dont une des cathètes est de longueur 24.
- 2.25** Soit x un nombre impair.
- 1) Montrer que le nombre $x^2 - 1$ est divisible par 8.
 - 2) Montrer que le nombre $x^4 - 1$ est divisible par 16.
 - 3) Peut-on généraliser ?
- 2.26** Montrer que le polynôme $x^4 + x^2 + 1$ n'est pas irréductible. En déduire que 10 101 est un nombre composé dans toutes les bases de numération.
- Indication :** écrire le polynôme $x^4 + x^2 + 1$ comme différence des carrés de deux polynômes.