2.9

1) $(x+1)(x^2-4) = 3(x-2)(x+1)$

$(x+1)(x^2-4) - 3(x-2)(x+1) = 0$

$(x+1)(x-2)(x+2) - 3(x-2)(x+1) = 0$

$(x+1)(x-2)\big((x+2) - 3\big) = 0$

$(x+1)(x-2)(x-1) = 0$

$x+1=0 \quad \text{ou} \quad x-2=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0$

$x=-1 \quad \text{ou} \quad x=2 \quad \text{ou} \quad x=1$

$\text{S} = \{-1\,;1\,;2\}$

2) $x^3+x^2 = 4x+4$

$x^3+x^2-4x-4=0$

$x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$

$(x+1)(x^2-4) = 0$

$(x+1)(x-2)(x+2) = 0$

$x+1=0 \quad \text{ou} \quad x-2=0 \quad \text{ou} \quad x+2=0$

$x=-1 \quad \text{ou} \quad x=2 \quad \text{ou} \quad x=-2$

$\text{S} = \{-2\,;-1\,;2\}$

3) $x^4+4 = 5x^2$

$x^4-5x^2+4=0$

$(x^2-1)(x^2-4) = 0$

$(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$

$x-1=0 \quad \text{ou} \quad x+1=0 \quad \text{ou} \quad x-2=0 \quad \text{ou} \quad x+2=0$

$x=1 \quad \text{ou} \quad x=-1 \quad \text{ou} \quad x=2 \quad \text{ou} \quad x=-2$

$\text{S} = \{-2\,;-1\,;1\,;2\}$

4) $9x^2 - (2x+5)^2 = 0$

$\big(3x - (2x+5)\big)\big(3x + (2x+5)\big) = 0$

$(x-5)(5x+5) = 5(x-5)(x+1) = 0$

$x-5=0 \quad \text{ou} \quad x+1=0$

$x=5 \quad \text{ou} \quad x=-1$

$\text{S} = \{-1\,;5\}$

5) $2(x^2-9) = x+3$

$2(x^2-9) - (x+3) = 0$

$2(x-3)(x+3) - (x+3) = 0$

$(x+3)\big(2(x-3)-1\big)=0$

$(x+3)(2x-7)=0$

$x+3=0 \quad \text{ou} \quad 2x-7=0$

$x=-3 \quad \text{ou} \quad x=\frac{7}{2}$

$\mathrm{S}=\left\{-3\,;\frac{7}{2}\right\}$

6) $x^3=x^2$

$x^3-x^2=0$

$x^2(x-1)=0$

$x=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0$

$x=0$ (solution double) $\quad \text{ou} \quad x=1$

$\mathrm{S}=\{0\,;1\}$

7) $x^3+2x^2-x-2=0$

$x^2(x+2)-(x+2)=0$

$(x+2)(x^2-1)=0$

$(x+2)(x-1)(x+1)=0$

$x+2=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0 \quad \text{ou} \quad x+1=0$

$x=-2 \quad \text{ou} \quad x=1 \quad \text{ou} \quad x=-1$

$\mathrm{S}=\{-2\,;-1\,;1\}$

8) $x^3-3x^2+3x-1=0$

$(x-1)^3=0$

$x-1=0$

$x=1$ (solution triple)

$\mathrm{S}=\{1\}$

9) $x^5-2x^4=x-2$

$x^5-2x^4-x+2=0$

$x^4(x-2)-(x-2)=0$

$(x-2)(x^4-1)=0$

$(x-2)(x^2-1)(x^2+1)$

$(x-2)(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$

$x-2=0 \quad \text{ou} \quad x-1=0 \quad \text{ou} \quad x+1=0 \quad \text{ou} \quad x^2+1=0$

$x=2 \quad \text{ou} \quad x=1 \quad \text{ou} \quad x=-1$

L'équation $x^2+1=0$ n'a aucune solution réelle : pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $x^2\geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2+1\geqslant 1>0$.

$\mathrm{S}=\{-1\,;1\,;2\}$

10) $x^3 - 2\,x^2 - 3\,x = 0$

$x\,(x^2 - 2\,x - 3) = 0$

$x\,(x-3)\,(x+1) = 0$

$x = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 = 0$

$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -1$

$\mathrm{S} = \{-1\,;0\,;3\}$

11) $x^8 + 9\,x^4 - 10 = 0$

$(x^4 - 1)\,(x^4 + 10) = 0$

$(x^2 - 1)\,(x^2 + 1)\,(x^4 + 10) = 0$

$(x-1)\,(x+1)\,(x^2 + 1)\,(x^4 + 10) = 0$

$x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^4 + 10 = 0$

$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$

L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a aucune solution réelle : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$.

L'équation $x^4 + 10 = 0$ n'a aucune solution réelle : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^4 = (x^2)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x^4 + 10 \geqslant 10 > 0$.

$\mathrm{S} = \{-1\,;1\}$

12) $4\,x^3 - 4\,x^2 + x = 0$

$x\,(4\,x^2 - 4\,x + 1) = 0$

$x\,(2\,x-1)^2 = 0$

$x = 0 \quad \text{ou} \quad 2\,x - 1 = 0$

$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{1}{2}$ (solution double)

$\mathrm{S} = \left\{0\,;\frac{1}{2}\right\}$