

2.15 Soit $2n + 1$ un nombre impair ($n \in \mathbb{Z}$).

Son carré diminué d'une unité vaut :

$$\begin{aligned}(2n + 1)^2 - 1 &= ((2n + 1) - 1)((2n + 1) + 1) \\&= 2n(2n + 2) = 2n \cdot 2(n + 1) \\&= 4n(n + 1)\end{aligned}$$

Étant donné que n et $n + 1$ constituent deux entiers consécutifs, l'un d'entre eux est pair et leur produit aussi. Il existe ainsi $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n(n + 1) = 2m$. On conclut que $(2n + 1)^2 - 1 = 4n(n + 1) = 4 \cdot 2m = 8m$ est bien un multiple de 8.