3 Division polynomiale

En arithmétique, on étudie la division des nombres entiers avec reste.
Étant donné deux nombres D (**dividende**) et $d \neq 0$ (**diviseur**), il existe exactement deux nombres entiers q (**quotient**) et r (**reste**) tels que

$$\mathrm{D} = d\,q + r \quad \text{avec } 0 \leqslant r < d\,.$$

Par exemple, $80 : 11 = 7$ reste 3, car $80 = 11 \cdot 7 + 3$ avec $0 \leqslant 3 < 11$.

On définit de même la division euclidienne des polynômes.
Étant donné deux polynômes $\mathrm{D}(x)$ (**dividende**) et $d(x) \neq 0$ (**diviseur**), il existe exactement deux polynômes $q(x)$ (**quotient**) et $r(x)$ (**reste**) tels que

$$\mathrm{D}(x) = d(x)\,q(x) + r(x) \quad \text{avec } \deg\big(r(x)\big) < \deg\big(d(x)\big)\,.$$

L'égalité $\mathrm{D} = d\,q + r$ s'appelle l'**égalité fondamentale** de la division.

Pour effectuer une division de deux polynômes, c'est-à-dire déterminer le quotient et le reste, on utilise un algorithme analogue à celui de la division numérique.

1) Ordonner le dividende et le diviseur selon les puissances décroissantes de la variable.
2) Diviser le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur ; on obtient ainsi le premier terme du quotient.
3) Multiplier le diviseur par le terme trouvé et retrancher ce produit du dividende (en fait, il est plus simple d'additionner l'opposé de ce produit). On obtient le premier reste partiel de la division.
4) Recommencer le procédé en prenant le premier reste partiel pour nouveau dividende. Les degrés des restes partiels successifs diminuent. Le processus s'arrête si le reste est nul ou le degré du reste est strictement inférieur au degré du diviseur.

Exemple Divisons $\mathrm{D}(x) = 4\,x^4 - 5\,x^2 + 7\,x + 8$ par $d(x) = x^2 + 2\,x - 3$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
4\,x^4 & & -\ 5\,x^2 & +\ 7\,x & +\ 8 & x^2 + 2\,x - 3 \\ \cline{6-6}
-\ 4\,x^4 & -\ 8\,x^3 & +\ 12\,x^2 & & & 4\,x^2 - 8\,x + 23 \\ \cline{1-3}
& -\ 8\,x^3 & +\ 7\,x^2 & +\ 7\,x & +\ 8 & \\
& +\ 8\,x^3 & +\ 16\,x^2 & -\ 24\,x & & \\ \cline{2-4}
& & 23\,x^2 & -\ 17\,x & +\ 8 & \\
& & -\ 23\,x^2 & -\ 46\,x & +\ 69 & \\ \cline{3-5}
& & & -\ 63\,x & +\ 77 &
\end{array}$$

On a ainsi obtenu l'égalité fondamentale de la division :
$4\,x^4 - 5\,x^2 + 7\,x + 8 = (x^2 + 2\,x - 3)\,(4\,x^2 - 8\,x + 23) + (-63\,x + 77)$

3.1 Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{D}(x)$ par $d(x)$, puis écrire l'égalité fondamentale de la division.

1) $\mathrm{D}(x) = x^4 - 3\,x^3 + x - 5$ $\qquad d(x) = x^2 - 3$
2) $\mathrm{D}(x) = 35\,x^3 + 47\,x^2 + 3\,x + 1$ $\qquad d(x) = 5\,x + 1$
3) $\mathrm{D}(x) = x^7 - 4\,x^6 + 2\,x^5 + x^4 - 3\,x^2 + 2\,x - 6$ $\qquad d(x) = x^5 - 3$
4) $\mathrm{D}(x) = x^8 + x^4 + 1$ $\qquad d(x) = x^2 - x + 1$
5) $\mathrm{D}(x) = x^5 - 3\,x^3 + 2\,x^2 + 5\,x$ $\qquad d(x) = x + 2$
6) $\mathrm{D}(x) = x^3 + 3$ $\qquad d(x) = 5\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1$
7) $\mathrm{D}(x) = 6\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x^2$ $\qquad d(x) = 2\,x^2 - 3$
8) $\mathrm{D}(x) = 7\,x^5 - x^4 + 6\,x^3 - 7\,x$ $\qquad d(x) = 7\,x^3 - x$
9) $\mathrm{D}(x) = 2\,x^3 - 1$ $\qquad d(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$
10) $\mathrm{D}(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$ $\qquad d(x) = 2\,x^2 - 1$

Schéma de Horner

Il existe une disposition pratique des calculs dans le cas de la division par $x - a$, c'est-à-dire un binôme unitaire du premier degré : le **schéma de Horner** [1].

Pour comprendre le procédé, il suffit d'observer attentivement la division dans sa disposition classique :

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3\,x^4 & -\ 8\,x^3 & & +\ 10\,x & +\ 5 & x-2 \\ \cline{6-6}
-\ 3\,x^4 & +\ 6\,x^3 & & & & 3\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 2 \\ \cline{1-5}
& -\ 2\,x^3 & & & & \\
& +\ 2\,x^3 & -\ 4\,x^2 & & & \\ \cline{2-5}
& & -\ 4\,x^2 & +\ 10\,x & & \\
& & +\ 4\,x^2 & -\ \ 8\,x & & \\ \cline{3-5}
& & & 2\,x & +\ 5 & \\
& & & -\ \ 2\,x & +\ 4 & \\ \cline{4-5}
& & & & 9 &
\end{array}$$

La disposition du schéma de Horner est la suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
3 & -8 & 0 & 10 & 5 \\
 & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \\
 & 6 & -4 & -8 & 4 \\ \hline
3 & -2 & -4 & 2 & 9
\end{array}$$

Les nombres de la première ligne sont les coefficients du dividende.

Le facteur de multiplication, ici 2, correspond au zéro du diviseur $x - 2$.

La dernière ligne fournit les coefficients du quotient $3\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 2$ et le reste 9.

1. William George Horner, mathématicien anglais (1786-1837).

3.2 Effectuer la division euclidienne de $\mathrm{D}(x)$ par $d(x)$ en utilisant le schéma de Horner, puis écrire l'égalité fondamentale de la division :

1) $\mathrm{D}(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ $\quad d(x) = x - 1$
2) $\mathrm{D}(x) = x^4 - 4\,x^3 - 12\,x^2 + 2\,x + 4$ $\quad d(x) = x + 2$
3) $\mathrm{D}(x) = 3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6$ $\quad d(x) = x + 2$
4) $\mathrm{D}(x) = 3\,x^4 - 5\,x^3 + 3\,x^2 + 3\,x - 4$ $\quad d(x) = x - 1$
5) $\mathrm{D}(x) = 2\,x^5 - 11\,x^4 + 16\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 3$ $\quad d(x) = x - 3$
6) $\mathrm{D}(x) = x^3 + 9\,x^2 + 26\,x + 25$ $\quad d(x) = x + 3$

3.3 Déterminer, par *utilisation successive du schéma de Horner*, le résultat des divisions suivantes :

1) $(x^3 - 3\,x^2 + 4) : \big((x - 2)\,(x + 1)\big)$
2) $(4\,x^3 + 4\,x^2 - 5\,x - 3) : \big((x - 1)\,(x + \frac{1}{2})\big)$
3) $(x^4 - 5\,x^2 + 4) : \big((x - 1)\,(x + 2)\big)$

3.4 Écrire les polynômes suivants comme produit de polynômes de degré 1, sachant qu'ils sont tous divisibles par $(x - 1)$ et $(x - 2)$.

1) $x^3 + x^2 - 10\,x + 8$ $\quad$ 2) $x^4 - 3\,x^3 - 7\,x^2 + 27\,x - 18$

Théorème *Le reste de la division d'un polynôme* $\mathrm{P}(x)$ *par le binôme* $x - a$ *vaut* $\mathrm{P}(a)$.

Preuve Soient $q(x)$ le quotient et r le reste de la division de $\mathrm{P}(x)$ par $x - a$.
Puisque $\deg(r) < \deg(x - a) = 1$, on en déduit que $\deg(r) = 0$, c'est-à-dire que r est un nombre.
L'égalité fondamentale de la division donne $\mathrm{P}(x) = (x - a)\,q(x) + r$. En remplaçant x par a dans cette égalité, on obtient $\mathrm{P}(a) = \underbrace{(a - a)}_{0}\,q(a) + r = r$.

Corollaire *Le nombre* a *est un zéro du polynôme* $\mathrm{P}(x)$ *si et seulement si* $\mathrm{P}(x)$ *est divisible par* $x - a$.

3.5 Calculer le reste de la division de $\mathrm{D}(x)$ par $d(x)$, *sans effectuer la division polynomiale* :

1) $\mathrm{D}(x) = x^3 - 4\,x^2 + 4$ $\quad d(x) = x - 5$
2) $\mathrm{D}(x) = x^5 - 1$ $\quad d(x) = x - 1$
3) $\mathrm{D}(x) = -6\,x^3 + 7\,x^2 - 6\,x + 5$ $\quad d(x) = x + 1$

4) $\mathrm{D}(x) = x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6$ $\qquad$ $d(x) = x + 3$

3.6 Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles les divisions qui suivent sont exactes, *sans effectuer la division*.

1) $(x^2 + a\,x + 15) : (x + 3)$
2) $(x^3 - 5\,x^2 + 7\,x + a) : (x - 1)$
3) $(x^3 + a\,x^2 - 9\,x - 5) : (x + 1)$

3.7 Déterminer le nombre k pour que

1) $x^3 + k\,x^2 - 5\,x + 6$ soit divisible par $x - 1$;
2) $2\,x^3 - x^2 - 7\,x + k$ soit divisible par $x + 2$;
3) $2\,x^3 - 9\,x^2 - 19\,x + k$ soit divisible par $2\,x + 1$.

3.8 Déterminer les nombres m et n pour que

1) $x^3 - x^2 + 2\,m\,x + n$ soit divisible par $x^2 - 2\,x + 2$;
2) $x^4 + m\,x^2 + n\,x - 4$ soit divisible par $x^2 + 1$;
3) $x^3 - x^2 + m\,x + n$ soit divisible par $(x + 2)\,(x - 5)$.

3.9 Le polynôme $2\,x^9 + x^6 - 7\,x - 6$ est-il divisible par $x^2 - x - 2$?

3.10 Soit $n > 0$ un entier arbitraire. Montrer que le polynôme

$$\mathrm{P}(x) = (x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$$

est divisible par $(x - 1)\,(x - 2)$.

3.11 Trouver un polynôme $\mathrm{P}(x)$ de degré deux qui admet 1 et -2 pour zéros, et tel que $\mathrm{P}(2) = 8$.

3.12 Construire un polynôme $\mathrm{P}(x)$ de degré deux tel

- qu'il soit divisible par $x - 2$;
- que le reste de la division de $\mathrm{P}(x)$ par $x + 4$ soit égal à 18 ;
- $\mathrm{P}(1) = -12$.

3.13 Déterminer un polynôme $\mathrm{P}(x)$ du troisième degré

- qui admet 4 pour zéro ;
- qui soit divisible par $x - 2$;
- dont la valeur numérique pour $x = -3$ est nulle ;
- et tel que $\mathrm{P}(1) = 84$.

3.14 Déterminer un polynôme $\mathrm{P}(x)$ du quatrième degré satisfaisant aux cinq conditions suivantes :

1) il admet -2 pour zéro ;
2) il est divisible par $x+1$;
3) il admet le facteur x dans sa décomposition en facteurs ;
4) il admet 180 pour reste de sa division par $x-3$;
5) $\mathrm{P}(2)=0$.

3.15 Déterminer un polynôme $\mathrm{P}(x)$ du cinquième degré satisfaisant aux six conditions suivantes :

1) sa valeur en 0 est 0 ;
2) il admet 2 pour zéro ;
3) il est divisible par $x+2$;
4) $\mathrm{P}(1)=0$;
5) il admet $x-3$ dans sa décomposition en facteurs ;
6) le reste de la division de $\mathrm{P}(x)$ par $x+3$ est 720.

3.16 Soit $\mathrm{P}(x)=2\,x^3+3\,x^2-11\,x-6$. Écrire $\mathrm{P}(x)$ comme produit d'un nombre réel et de polynômes unitaires du premier degré sachant qu'un nombre entier compris entre -4 et 0 est solution de l'équation $\mathrm{P}(x)=0$.

Théorème *Soit* $\mathrm{P}(x)=c_n\,x^n+c_{n-1}\,x^{n-1}+\ldots+c_2\,x^2+c_1\,x+c_0$ *un polynôme à coefficients entiers.*

1) *Si a est un zéro entier de $\mathrm{P}(x)$, alors a est un diviseur de c_0.*
2) *Si $a=\frac{u}{v}$ est un zéro rationnel de $\mathrm{P}(x)$, avec u et v premiers entre eux, alors u est un diviseur de c_0 et v est un diviseur de c_n.*

Preuve

1) Vu que a est un zéro de $\mathrm{P}(x)$, on a :

$$c_n\,a^n+c_{n-1}\,a^{n-1}+\ldots+c_2\,a^2+c_1\,a+c_0=0$$
$$c_0=-c_n\,a^n-c_{n-1}\,a^{n-1}-\ldots-c_2\,a^2-c_1\,a$$
$$c_0=a\left(-c_n\,a^{n-1}-c_{n-1}\,a^{n-2}-\ldots-c_2\,a-c_1\right)$$

Ainsi c_0 est un multiple de a ou, si l'on préfère, a est un diviseur de c_0.

2) Puisque $\frac{u}{v}$ est un zéro de $\mathrm{P}(x)$, on obtient :

$$c_n\left(\tfrac{u}{v}\right)^n+c_{n-1}\left(\tfrac{u}{v}\right)^{n-1}+\ldots+c_2\left(\tfrac{u}{v}\right)^2+c_1\,\tfrac{u}{v}+c_0=0$$

La multiplication de cette égalité par v^n donne :

$$c_n\,u^n+c_{n-1}\,u^{n-1}\,v+\ldots+c_2\,u^2\,v^{n-2}+c_1\,u\,v^{n-1}+c_0\,v^n=0$$

On en déduit :

(a) $c_0\, v^n = u\,(-c_n\, u^{n-1} - c_{n-1}\, u^{n-2}\, v - \ldots - c_2\, u\, v^{n-2} - c_1\, v^{n-1})$
Par conséquent u divise $c_0\, v^n$. Attendu que u et v sont premiers entre eux, le lemme de Gauss implique que u divise c_0.

(b) $c_n\, u^n = v\,(-c_{n-1}\, u^{n-1} - \ldots - c_2\, u^2\, v^{n-3} - c_1\, u\, v^{n-2} - c_0\, v^{n-1})$
Donc v divise $c_n\, u^n$. Comme u et v sont premiers entre eux, il en résulte, d'après le lemme de Gauss, que v divise c_n.

Exemple Déterminons les zéros rationnels de $\mathrm{P}(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 - 7\,x + 2$.
Les zéros entiers possibles sont ± 1 et ± 2, car les diviseurs de 2 sont ± 1 et ± 2.
Les zéros rationnels possibles sont $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}$ et $\pm\frac{2}{3}$, car les diviseurs de 2 sont ± 1 et ± 2 et les diviseurs de 3 sont ± 1 et ± 3.
En testant successivement ces candidats, on constate que $\mathrm{P}(1) = 0$, $\mathrm{P}(-2) = 0$ et $\mathrm{P}\big(\frac{1}{3}\big) = 0$, de sorte que l'on a obtenu les trois zéros du polynôme $\mathrm{P}(x)$.
Remarquons qu'après avoir trouvé trois zéros, il est inutile de tester les autres candidats, étant donné qu'un polynôme de degré n possède au plus n zéros.

3.17 Chercher les zéros rationnels des polynômes suivants.

1) $f(x) = 6\,x^4 - 5\,x^3 + 7\,x^2 - 5\,x + 1$
2) $f(x) = 18\,x^3 - 15\,x^2 - 4\,x + 4$
3) $f(x) = 3\,x^4 - 6\,x^3 + 4\,x^2 - 10\,x + 2$
4) $f(x) = 2\,x^3 - x^2 - x - 3$
5) $f(x) = 6\,x^4 + x^3 + 5\,x^2 + x - 1$

3.18 Résoudre les équations suivantes.

1) $6\,x^5 + 19\,x^4 + x^3 - 6\,x^2 = 0$
2) $6\,x^4 + x^3 + 5\,x^2 + x - 1 = 0$
3) $3\,x^4 + 11\,x^3 + 9\,x^2 + 2\,x = 0$

Réponses

3.1

1) $x^4 - 3\,x^3 + x - 5 = (x^2 - 3)\,(x^2 - 3\,x + 3) + (-8\,x + 4)$
2) $35\,x^3 + 47\,x^2 + 3\,x + 1 = (5\,x + 1)\,(7\,x^2 + 8\,x - 1) + 2$
3) $x^7 - 4\,x^6 + 2\,x^5 + x^4 - 3\,x^2 + 2\,x - 6 = (x^5 - 3)\,(x^2 - 4\,x + 2) + (x^4 - 10\,x)$
4) $x^8 + x^4 + 1 = (x^2 - x + 1)\,(x^6 + x^5 - x^3 + x + 1)$
5) $x^5 - 3\,x^3 + 2\,x^2 + 5\,x = (x + 2)\,(x^4 - 2\,x^3 + x^2 + 5) - 10$
6) $x^3 + 3 = \frac{1}{5}\,(5\,x^3 - 3\,x^2 + 2\,x - 1) + \frac{1}{5}\,(3\,x^2 - 2\,x + 16)$
7) $6\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x^2 = (2\,x^2 - 3)\,(3\,x^2 + 2\,x + 1) + (6\,x + 3)$
8) $7\,x^5 - x^4 + 6\,x^3 - 7\,x = (7\,x^3 - x)\,(x^2 - \frac{1}{7}\,x + 1) + \big(-\frac{1}{7}\,x^2 - 6\,x\big)$

9) $2\,x^3-1=\frac{2}{3}\,(3\,x^3-x^2+x+1)+\left(\frac{2}{3}\,x^2-\frac{2}{3}\,x-\frac{5}{3}\right)$
10) $3\,x^3-x^2+x+1=(2\,x^2-1)\left(\frac{3}{2}\,x-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\,x+\frac{1}{2}\right)$

3.2
1) $x^4+x^3+x^2+x+1=(x-1)\,(x^3+2\,x^2+3\,x+4)+5$
2) $x^4-4\,x^3-12\,x^2+2\,x+4=(x+2)\,(x^3-6\,x^2+2)$
3) $3\,x^5-8\,x^4+7\,x^3+x^2-5\,x+6=(x+2)\,(3\,x^4-14\,x^3+35\,x^2-69\,x+133)-260$
4) $3\,x^4-5\,x^3+3\,x^2+3\,x-4=(x-1)\,(3\,x^3-2\,x^2+x+4)$
5) $2\,x^5-11\,x^4+16\,x^3-2\,x^2-4\,x+3=(x-3)\,(2\,x^4-5\,x^3+x^2+x-1)$
6) $x^3+9\,x^2+26\,x+25=(x+3)\,(x^2+6\,x+8)+1$

3.3 1) $x-2$ 2) $4\,x+6$ 3) x^2-x-2

3.4 1) $(x+4)\,(x-1)\,(x-2)$ 2) $(x-3)\,(x+3)\,(x-1)\,(x-2)$

3.5 1) 29 2) 0 3) 24 4) -12

3.6 1) $a=8$ 2) $a=-3$ 3) $a=-3$

3.7 1) $k=-2$ 2) $k=6$ 3) $k=-7$

3.8 1) $m=0, n=2$ 2) $m=-3, n=0$ 3) $m=-16, n=-20$

3.9 non

3.11 $\mathrm{P}(x)=2\,(x-1)\,(x+2)$

3.12 $\mathrm{P}(x)=(x-2)\,(3\,x+9)$

3.13 $\mathrm{P}(x)=7\,(x-4)\,(x-2)\,(x+3)$

3.14 $\mathrm{P}(x)=3\,x\,(x+2)\,(x+1)\,(x-2)$

3.15 $\mathrm{P}(x)=-2\,x\,(x-2)\,(x+2)\,(x-1)\,(x-3)$

3.16 $\mathrm{P}(x)=(x+3)\,(x-2)\,(2\,x+1)$

3.17
1) $\mathrm{S}=\left\{\frac{1}{3}\,;\frac{1}{2}\right\}$ 2) $\mathrm{S}=\left\{-\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\right\}$ 3) $\mathrm{S}=\varnothing$
4) $\mathrm{S}=\left\{\frac{3}{2}\right\}$ 5) $\mathrm{S}=\left\{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\right\}$

3.18
1) $\mathrm{S}=\left\{-3\,;-\frac{2}{3}\,;0\,;\frac{1}{2}\right\}$ 2) $\mathrm{S}=\left\{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{3}\right\}$
3) $\mathrm{S}=\left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\,;-\frac{2}{3}\,;\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\,;0\right\}$

3.19 Factoriser les polynômes suivants :

1) $x^4 + 4\,x^3 - 7\,x^2 - 22\,x + 24$ 2) $2\,x^3 + 3\,x^2 - 11\,x - 6$

3.20 Trouver tous les polynômes $\mathrm{P}(x)$ de degré 3 divisibles par $x^2 + x + 1$ tels que $\mathrm{P}(1) = 0$ et $\mathrm{P}(0) = 1$.

3.21 Déterminer, *sans effectuer la division*, le reste de la division de A par B.

1) $\mathrm{A} = 2\,x^6 - 4\,x^5 + 3\,x^4 - 2\,x^2 - x + 3$ $\mathrm{B} = x^2 - x - 2$
2) $\mathrm{A} = x^{55} - 11\,x^{33} + 55\,x^{11} + 1$ $\mathrm{B} = x^2 - 1$
3) $\mathrm{A} = x^3 + x^2 - 2\,x + 3$ $\mathrm{B} = x^2 - 7\,x + 12$

3.22
1) Montrer que le polynôme $\mathrm{A} = (x+1)^{2n} + (x+2)^n - 1$ est divisible par le polynôme $(x+1)\,(x+2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que le polynôme $\mathrm{A} = x^{n+1} - x^n - x + 1$ est divisible par $(x-1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.23 Montrer que les équations suivantes n'ont pas de solutions rationnelles.

1) $6\,x^4 + 3\,x^2 - 4\,x + 6 = 0$ 2) $2\,x^5 + 3\,x^3 + 7 = 0$

Réponses

3.19 1) $(x-1)\,(x-2)\,(x+3)\,(x+4)$ 2) $(x+3)\,(2\,x+1)\,(x-2)$

3.20 $\mathrm{P}(x) = 1 - x^3$

3.21 1) $10\,x + 21$ 2) $45\,x + 1$ 3) $42\,x - 93$