

3.17

- 1) Les zéros entiers possibles sont les diviseurs de 1, c'est-à-dire ± 1 .

$$f(1) = 6 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1 + 7 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 1 = 4 \neq 0$$

$$f(-1) = 6 \cdot (-1)^4 - 5 \cdot (-1) + 7 \cdot (-1) - 5 \cdot (-1) + 1 = 24 \neq 0$$

Le polynôme $f(x)$ ne possède donc pas de solutions entières.

Les zéros rationnels possibles sont $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{3}$ et $\pm \frac{1}{6}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 0$$

On sait désormais que $f(x)$ est divisible par $x - \frac{1}{2}$. Déterminons l'autre facteur au moyen du schéma de Horner.

$$\begin{array}{r|rrrr} 6 & -5 & 7 & -5 & 1 \\ & 3 & -1 & 3 & -1 \\ \hline 6 & -2 & 6 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 1 &= (x - \frac{1}{2})(6x^3 - 2x^2 + 6x - 2) \\ &= (x - \frac{1}{2})2(3x^3 - x^2 + 3x - 1) \\ &= (2x - 1)(x^2(3x - 1) + (3x - 1)) \\ &= (2x - 1)(3x - 1)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

On conclut que $f(x) = 0$ si

$$(a) \quad 2x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{2}$$

$$(b) \quad 3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$$

$$(c) \quad x^2 + 1 = 0 \text{ ce qui est impossible, car } x^2 \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

C'est pourquoi $S = \{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\}$.

- 2) Les zéros entiers possibles sont les diviseurs de 4, à savoir ± 1 , ± 2 et ± 4 .

$$f(1) = 18 \cdot 1^3 - 15 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 3 \neq 0$$

$$f(-1) = 18 \cdot (-1)^3 - 15 \cdot (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 4 = -25 \neq 0$$

$$f(2) = 18 \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 80 \neq 0$$

$$f(-2) = 18 \cdot (-2)^3 - 15 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 4 = -192 \neq 0$$

$$f(4) = 18 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 4 = 900 \neq 0$$

$$f(-4) = 18 \cdot (-4)^3 - 15 \cdot (-4)^2 - 4 \cdot (-4) + 4 = -1372 \neq 0$$

Le polynôme $f(x)$ ne possède donc pas de solutions entières.

Les zéros rationnels possibles sont $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{3}$, $\pm \frac{2}{3}$, $\pm \frac{4}{3}$, $\pm \frac{1}{6}$, $\pm \frac{1}{9}$, $\pm \frac{2}{9}$, $\pm \frac{4}{9}$ et $\pm \frac{1}{18}$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 18 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 15 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 15 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 0$$

Il apparaît ainsi que $f(x)$ admet $x + \frac{1}{2}$ comme facteur. Utilisons le schéma de Horner pour poursuivre la factorisation.

$$\begin{array}{r|rrrr} 18 & -15 & -4 & 4 \\ & -9 & 12 & -4 \\ \hline 18 & -24 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
18x^3 - 15x^2 - 4x + 4 &= (x + \tfrac{1}{2})(18x^2 - 24x + 8) \\
&= (x + \tfrac{1}{2})2(9x^2 - 12x + 4) \\
&= (2x + 1)(3x - 2)^2
\end{aligned}$$

On en tire que $f(x)$ s'annule si

(a) $2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$

(b) $3x - 2 = 0 \iff x = \frac{2}{3}$ (solution double)

En résumé $S = \{-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\}$.

3) Les zéros entiers possibles de $f(x)$ sont ± 1 et ± 2 .

$$f(1) = 3 \cdot 1^4 - 6 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 2 = -7 \neq 0$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^4 - 6 \cdot (-1)^3 + 4 \cdot (-1)^2 - 10 \cdot (-1) + 2 = 25 \neq 0$$

$$f(2) = 3 \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 2 = -2$$

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^4 - 6 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 - 10 \cdot (-2) + 2 = 134 \neq 0$$

Le polynôme $f(x)$ ne possède donc pas de solutions entières.

Les zéros rationnels possibles sont $\pm \frac{1}{3}$ et $\pm \frac{2}{3}$.

$$f(\frac{1}{3}) = 3 \cdot (\frac{1}{3})^4 - 6 \cdot (\frac{1}{3})^3 + 4 \cdot (\frac{1}{3})^2 - 10 \cdot \frac{1}{3} + 2 = -\frac{29}{27} \neq 0$$

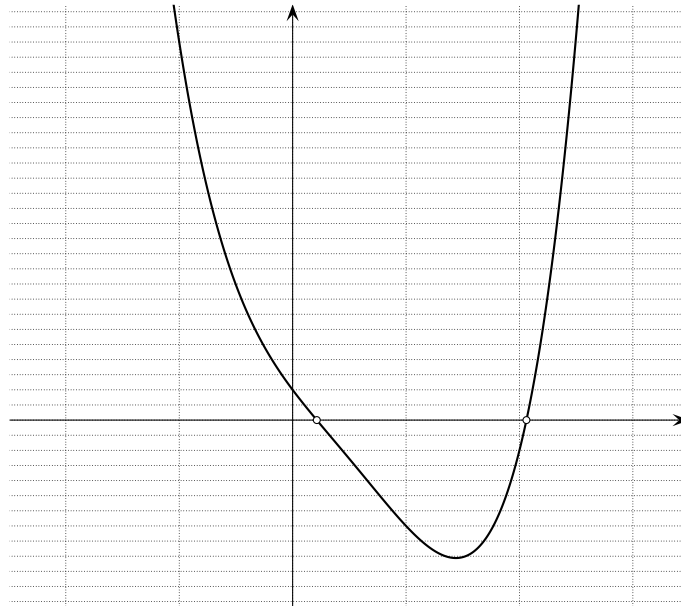
$$f(-\frac{1}{3}) = 3 \cdot (-\frac{1}{3})^4 - 6 \cdot (-\frac{1}{3})^3 + 4 \cdot (-\frac{1}{3})^2 - 10 \cdot (-\frac{1}{3}) + 2 = \frac{163}{27} \neq 0$$

$$f(\frac{2}{3}) = 3 \cdot (\frac{2}{3})^4 - 6 \cdot (\frac{2}{3})^3 + 4 \cdot (\frac{2}{3})^2 - 10 \cdot \frac{2}{3} + 2 = -\frac{110}{27} \neq 0$$

$$f(-\frac{2}{3}) = 3 \cdot (-\frac{2}{3})^4 - 6 \cdot (-\frac{2}{3})^3 + 4 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - 10 \cdot (-\frac{2}{3}) + 2 = \frac{346}{27} \neq 0$$

Le polynôme $f(x)$ ne possède donc pas de solutions rationnelles.

En revanche, le polynôme $f(x)$ possède deux solutions réelles, comme l'illustre son graphe :



- 4) Les zéros entiers possibles de $f(x)$ sont ± 1 et ± 3 .

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 - 1 - 3 = -3 \neq 0$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) - 3 = -5 \neq 0$$

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 3^2 - 3 - 3 = 39 \neq 0$$

$$f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 - (-3)^2 - (-3) - 3 = -63 \neq 0$$

Il n'y a donc pas de solutions entières.

Les zéros rationnels possibles sont $\pm \frac{1}{2}$ et $\pm \frac{3}{2}$.

$$f(\frac{1}{2}) = 2 \cdot (\frac{1}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{2} \neq 0$$

$$f(-\frac{1}{2}) = 2 \cdot (-\frac{1}{2})^3 - (-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 3 = -3 \neq 0$$

$$f(\frac{3}{2}) = 2 \cdot (\frac{3}{2})^3 - (\frac{3}{2})^2 - \frac{3}{2} - 3 = 0$$

Il en résulte que $f(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$ est divisible par $x - \frac{3}{2}$. Déterminons le quotient au moyen du schéma de Horner.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & -1 & -3 \\ & & 3 & 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{On obtient } 2x^3 - x^2 - x - 3 &= (x - \frac{3}{2})(2x^2 + 2x + 2) = \\ &= (x - \frac{3}{2})2(x^2 + x + 1) \\ &= (2x - 3)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

On remarque que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet aucune solution réelle, vu que $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$.

C'est pourquoi $S = \{\frac{3}{2}\}$.

- 5) $f(x) = 6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1$ a pour zéros entiers possibles ± 1 .

$$f(1) = 6 \cdot 1^4 + 1^3 + 5 \cdot 1^2 + 1 - 1 = 12 \neq 0$$

$$f(-1) = 6 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 1 = 8 \neq 0$$

Le polynôme $f(x)$ n'admet par conséquent aucune solution entière.

Les zéros rationnels possibles sont $\pm \frac{1}{2}$, $\pm \frac{1}{3}$ et $\pm \frac{1}{6}$.

$$f(\frac{1}{2}) = 6 \cdot (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^3 + 5 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{5}{4} \neq 0$$

$$f(-\frac{1}{2}) = 6 \cdot (-\frac{1}{2})^4 + (-\frac{1}{2})^3 + 5 \cdot (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) - 1 = 0$$

Il en découle que $x + \frac{1}{2}$ est un facteur de $f(x)$. Poursuivons la factorisation à l'aide du schéma de Horner.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 6 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ & & -3 & 1 & -3 & 1 \\ \hline 6 & -2 & 6 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 6x^4 + x^3 + 5x^2 + x - 1 &= (x + \frac{1}{2})(6x^3 - 2x^2 + 6x - 2) \\ &= (x + \frac{1}{2})2(3x^3 - x^2 + 3x - 1) \\ &= (2x + 1)(3x^3 - x^2 + 3x - 1) \\ &= (2x + 1)(x^2(3x - 1) + (3x - 1)) \\ &= (2x + 1)(3x - 1)(x^2 + 1) \end{aligned}$$

On conclut que $f(x) = 0$ si

(a) $2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$

(b) $3x - 1 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$

(c) $x^2 + 1 = 0$ ce qui est impossible, car $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

En définitive $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$.