5 Étude du signe & Inéquations

Inéquations du 1^er degré

Les inéquations du 1^er degré se résolvent de la même manière que les équations du 1^er degré, à une exception près :

Il faut faire bien attention de changer le sens de l'inégalité lorsqu'on multiplie ou divise par un nombre négatif.

Exemple $3 - 2\,x \leqslant 0 \implies -2\,x \leqslant -3 \implies x \geqslant \frac{3}{2} \implies \mathrm{S} = [\frac{3}{2}\,;+\infty[$

5.1 Résoudre les inéquations.

1) $5\,(1 + 4\,x) > 7 + 12\,x$

2) $\dfrac{3 - x}{12} - \dfrac{x}{4} \geqslant 3 + \dfrac{5\,(x-1)}{3}$

3) $2\,x - \dfrac{6\,x+1}{2} - \dfrac{8\,x-1}{3} + \dfrac{11\,x}{3} < 0$

4) $2\,x - \dfrac{2\,x}{9} \leqslant \dfrac{1}{9}\left(16\,x - \dfrac{3}{2}\right)$

5) $\dfrac{5\,x}{18} - \dfrac{4\,x-3}{8} > \dfrac{9-2\,x}{9}$

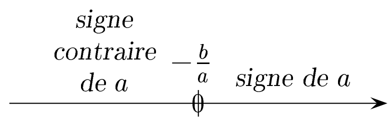
6) $x - 7\left(\dfrac{x}{5} - \dfrac{x-5}{4}\right) \geqslant -\dfrac{35}{4}$

7) $\dfrac{3\,x}{2} - \dfrac{2\,x}{3} \geqslant 5\left(\dfrac{x}{6} + 1\right) - 5$

8) $\dfrac{x-2}{3} - \dfrac{5}{9}(x-1) < \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{5}{2}$

Signe du binôme $a\,x + b$

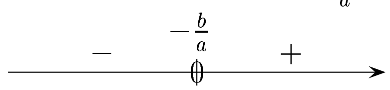
Le signe du binôme $a\,x + b$ est donné par la règle

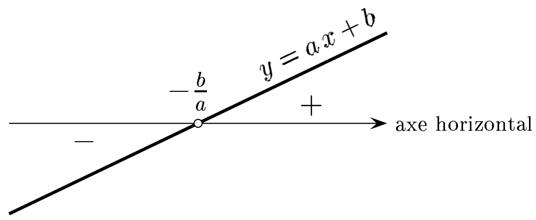


Preuve

$\boxed{a > 0}$ $a\,x + b \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{b}{a}$

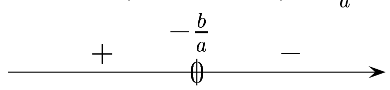
$a\,x + b \leqslant 0 \iff x \leqslant -\frac{b}{a}$

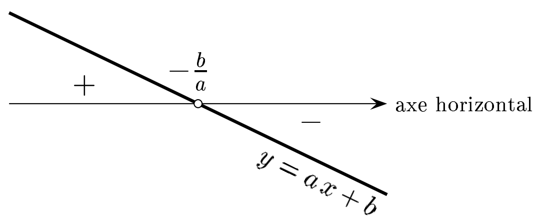




$\boxed{a < 0}$ $a\,x + b \geqslant 0 \iff x \leqslant -\frac{b}{a}$

$a\,x + b \leqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{b}{a}$





5.2 Étudier le signe des binômes suivants :

1) $2\,x + 1$ 2) $-3\,x + 7$ 3) $6\,x - 4$

4) $-9\,x$ 5) $-\frac{1}{2}\,x - 1$ 6) $\frac{2}{3}\,x - \frac{1}{2}$

Signe du trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$

Posons $\Delta = b^2 - 4\,a\,c$. Le signe du trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$ est donné par :

1) *si* $\Delta < 0$: *signe de a* $\longrightarrow$

2) *si* $\Delta = 0$: *signe de a* $\quad x_1 \quad$ *signe de a* $\longrightarrow$ $\qquad$ *où* $x_1 = \frac{-b}{2\,a}$

3) *si* $\Delta > 0$: *signe de a* $\quad x_1 \quad$ *signe contraire de a* $\quad x_2 \quad$ *signe de a* $\longrightarrow$ $\qquad$ *où* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2\,a}$

Preuve $\quad$ $$a\,x^2 + b\,x + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2\,a}\,x + \frac{b^2}{4\,a^2}\right) - \frac{b^2}{4\,a^2} + \frac{c}{a}\right)$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2}\right)$$

1) Supposons $\Delta < 0$.
Alors $-\frac{\Delta}{4\,a^2} > 0$, de sorte que $\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\,a^2} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
Le trinôme $a\,x^2 + b\,x + c$ a donc toujours le signe du coefficient a.

2) Supposons $\Delta = 0$.
Alors $a\left(x + \frac{b}{2\,a}\right)^2$ s'annule pour $x = -\frac{b}{2\,a}$ et possède le même signe que le coefficient a pour toute autre valeur de x.

3) Supposons $\Delta > 0$.
Alors le trinôme se factorise : $a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$.
Sans perte de généralité, supposons $x_1 < x_2$ et déterminons le signe de cette expression à l'aide d'un tableau de signes :

		x_1		x_2	
a	$\mathrm{sgn}(a)$		$\mathrm{sgn}(a)$		$\mathrm{sgn}(a)$
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$	$\mathrm{sgn}(a)$	0	$-\mathrm{sgn}(a)$	0	$\mathrm{sgn}(a)$

5.3 Étudier le signe des trinômes suivants :

1) $6\,x^2 - x - 2$ $\qquad$ 2) $8\,x^2 - 10\,x + 3$ $\qquad$ 3) $-x^2 + 6\,x - 9$

4) $-2\,x^2 + 7\,x + 4$ $\qquad$ 5) $25\,x^2 - 30\,x + 34$ $\qquad$ 6) $-3\,x^2 + 24\,x - 60$

7) $6\,x^2$ $\qquad$ 8) $6\,x^2 + 7\,x$ $\qquad$ 9) $8\,x^2 - 25$

Signe d'un polynôme

On étudie le signe d'un polynôme en déterminant le signe de chacun de ses facteurs. On détermine alors le signe du polynôme grâce à la règle des signes. On présente cette étude dans un tableau dans lequel on prend soin d'ordonner les zéros des différents facteurs.

Exemple Étudions le signe du polynôme $\mathrm{P}(x) = x^3 + x^2 - 4\,x - 4$.

Il faut en premier lieu factoriser ce polynôme :

$x^3+x^2-4\,x-4 = x^2\,(x+1)-4\,(x+1) = (x+1)\,(x^2-4) = (x+1)\,(x-2)\,(x+2)$

On établit ensuite le tableau des signes :

x		-2		-1		2	
$x+1$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-2$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$
$\mathrm{P}(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

5.4 Étudier le signe des polynômes suivants :

1) $x\,(x-1)$
2) $(x+1)\,(x-2)$
3) $(2-x)\,(x+3)\,(2\,x-1)$
4) $x\,(2\,x-3)\,(1-3\,x)$
5) $(x-2)\,(6-2\,x)\,(4-x)$
6) $(4+x)\,(3\,x-1)\,(2-2\,x)$
7) $(x+2)\,(x^2+2\,x+2)$
8) $x^2\,(x-11)^{11}\,(6-x)^3$

Signe d'une fraction rationnelle

On étudie également le signe d'une fraction rationnelle à l'aide d'un tableau de signes, en tenant compte des facteurs du numérateur et du dénominateur.

Les zéros du dénominateur constituent les valeurs pour lesquelles la fraction rationnelle n'est pas définie ; on les signale par une double barre.

Exemple Étudions le signe de la fraction rationnelle $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2-4\,x+4}{x^2-2\,x-3}$.

On commence par la factoriser : $\mathrm{F}(x) = \dfrac{x^2-4\,x+4}{x^2-2\,x-3} = \dfrac{(x-2)^2}{(x+1)\,(x-3)}$.

On peut alors établir le tableau des signes :

x		-1		2		3	
$(x-2)^2$	$+$	||	$+$	0	$+$	||	$+$
$x+1$	$-$	||	$+$	|	$+$	||	$+$
$x-3$	$-$	||	$-$	|	$-$	||	$+$
$\mathrm{F}(x)$	$+$	||	$-$	0	$-$	||	$+$

5.5 Étudier le signe des fractions rationnelles suivantes :

1) $\dfrac{(x-2)\,(x+2)}{x-1}$
2) $\dfrac{2\,x+3}{(x-1)\,(x+2)}$
3) $\dfrac{(x-2)\,(3-x)}{(4+x)\,(3\,x-1)}$

5.6 Étudier le signe des expressions suivantes :

1) $9\,x^2-4$ 2) $8\,x^3-1$ 3) $1-x^4$

4) $4\,x^2-12\,x+9$ 5) $x^2+3\,x+2$ 6) $x^4-13\,x^2+36$

7) $\dfrac{1}{2-x}+1$ 8) $x+\dfrac{2}{x-3}$ 9) $(x-2)\left(\dfrac{3}{2-x}-3\,x\right)$

5.7 Résoudre les inéquations.

1) $x^2-3\,x+2>0$ 2) $-x^2+3\,x+4>0$ 3) $x^2-10\,x+40>0$

4) $4\,x^2-20\,x+25>0$ 5) $x^2-2\,x\leqslant 0$ 6) $5\,x^2>0$

7) $5\,x^2+8\,x+4<0$ 8) $4\,x^2>16$ 9) $(x-2)^2+2\,x<-2$

5.8 Résoudre les inéquations.

1) $x^2>x$ 2) $x^3<4\,x$

3) $x^2-3\,x>-2$ 4) $(x-2)^2>4\,(x-1)^2$

5) $x^3-1<x^2-2\,x+1$ 6) $(x+3)^2>5\,(x+3)\,(x-2)$

7) $(x-1)^2\,(x-2)<(x^2-1)\,(2-x)$ 8) $(2\,x-1)^2>9\,(2-x)^2$

5.9 Résoudre les inéquations.

1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x^2-1}>0$ 2) $x>\dfrac{1}{x}$

3) $\dfrac{4\,x-3}{x-1}\geqslant 2$ 4) $\dfrac{x-1}{x^3}-\dfrac{x+1}{x^3-x^2}<\dfrac{3}{2\,x^2-x^3-x}$

5) $\dfrac{3\,x^2+12\,x+1}{2\,x^2+6\,x+1}\geqslant 2$ 6) $\dfrac{2\,x}{4\,x^2-1}\geqslant\dfrac{2\,x+1}{4\,x^2-4\,x+1}$

7) $\dfrac{5\,x^2+2}{x^2-9}>\dfrac{5\,x-4}{x-3}$ 8) $\dfrac{1}{x^2-2\,x}\leqslant 1-\dfrac{2}{x}$

9) $\dfrac{x^2-3\,x+2}{x^2-7\,x+12}>1$ 10) $\dfrac{5}{x^2+5\,x+6}-\dfrac{2}{x^2-4}\geqslant\dfrac{3}{x^2-9}$

5.10 Résoudre les systèmes d'inéquations.

1) $\begin{cases} 4\,x-4\leqslant 0 \\ 3\,x+2>0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2-10\,x+21\leqslant 0 \\ -x^2-6\,x+16>0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3\,x-8}{5-6\,x}\geqslant 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x+1}>0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4\,x-4\leqslant 0 \\ 3\,x+12<0 \\ x+8>3\,x+2 \end{cases}$

5) $-3 < \dfrac{7-x}{x+3} \leqslant 3$

6) $(x-2)\left(\dfrac{2\,x+3}{2-x} - 4\,x\right) \leqslant 1$

7) $\begin{cases} x^2 - 4 \leqslant 0 \\ 3\,x + 2 > 0 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4\,x^2 - 4\,x \leqslant -1 \\ \dfrac{x+7}{2} > x - 3 \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{3\,x-5}{2-6\,x} \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2} > 1 \end{cases}$

10) $-3 < 1 - x^2 \leqslant 3$

11) $\begin{cases} 9\,x - 2 < 3\,x - 14 \\ 5\,x + 3 < 15 - 7\,x \\ 11\,x - 4 > 10\,x - 9 \end{cases}$

12) $\begin{cases} \dfrac{4\,x-5}{2-3\,x} \geqslant 0 \\ \dfrac{x^2+4}{x+2} > 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} (x+1)^3 - 3\,(x-1)^2 > x^3 - 11 \\ \dfrac{3\,x-1}{2} < x + \dfrac{x-2}{5} \\ 1 + \dfrac{2}{x} \leqslant \dfrac{3}{x^2} \end{cases}$

14) $\begin{cases} (x+2)\,(6-x) \geqslant 0 \\ x^2 - x - 12 \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{x^2-9} > 0 \end{cases}$

Réponses

5.1

1) $S = \left]\,\frac{1}{4}\,;+\infty\right[$ 2) $S = \left]-\infty\,;-\frac{13}{24}\right]$ 3) $S = \mathbb{R}$

4) $S = \varnothing$ 5) $S = \varnothing$ 6) $S = [\,0\,;+\infty[$

7) $S = \mathbb{R}$ 8) $S = \left]\,\frac{77}{17}\,;+\infty\right[$

5.2

1) $-\quad -\frac{1}{2}\quad +$ 2) $+\quad \frac{7}{3}\quad -$ 3) $-\quad \frac{2}{3}\quad +$

4) $+\quad 0\quad -$ 5) $+\quad -2\quad -$ 6) $-\quad \frac{3}{4}\quad +$

5.3

1) $+\quad -\frac{1}{2}\quad -\quad \frac{2}{3}\quad +$ 2) $+\quad \frac{1}{2}\quad -\quad \frac{3}{4}\quad +$ 3) $-\quad 3\quad -$

4) $-\quad -\frac{1}{2}\quad +\quad 4\quad -$ 5) $+$ 6) $-$

7) $+\quad 0\quad +$ 8) $+\quad -\frac{7}{6}\quad -\quad 0\quad +$ 9) $+\quad -\frac{5\sqrt{2}}{4}\quad -\quad \frac{5\sqrt{2}}{4}\quad +$

5.4

1) $+\quad 0\quad -\quad 1\quad +$ 2) $+\quad -1\quad -\quad 2\quad +$ 3) $+\quad -3\quad -\quad \frac{1}{2}\quad +\quad 2\quad -$

4) $+ \quad 0 \quad - \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{3}{2} \quad -$ 5) $- \quad 2 \quad + \quad 3 \quad - \quad 4 \quad +$ 6) $+ \quad -4 \quad - \quad \frac{1}{3} \quad + \quad 1 \quad -$

7) $- \quad -2 \quad +$ 8) $- \quad 0 \quad - \quad 6 \quad + \quad 11 \quad -$

5.5 1) $- \quad -2 \quad + \quad 1\,\| \quad - \quad 2 \quad +$ 2) $- \quad -2\,\| \quad + \quad -\frac{3}{2} \quad - \quad 1\,\| \quad +$ 3) $- \quad -4\,\| \quad + \quad \frac{1}{3}\,\| \quad - \quad 2 \quad + \quad 3 \quad -$

5.6 1) $+ \quad -\frac{2}{3} \quad - \quad \frac{2}{3} \quad +$ 2) $- \quad \frac{1}{2} \quad +$ 3) $- \quad -1 \quad + \quad 1 \quad -$

4) $+ \quad \frac{3}{2} \quad +$ 5) $+ \quad -2 \quad - \quad -1 \quad +$ 6) $+ \quad -3 \quad - \quad -2 \quad + \quad 2 \quad - \quad 3 \quad +$

7) $+ \quad 2\,\| \quad - \quad 3 \quad +$ 8) $- \quad 1 \quad + \quad 2 \quad - \quad 3\,\| \quad +$ 9) $- \quad 1 \quad - \quad 2\,\| \quad -$

5.7
1) $S =]-\infty\,;1\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty[$ 2) $S =]-1\,;4[$
3) $S = \mathbb{R}$ 4) $S = \mathbb{R}-\{\frac{5}{2}\} =]-\infty\,;\frac{5}{2}\,[\,\cup\,]\,\frac{5}{2}\,;+\infty[$
5) $S = [\,0\,;2\,]$ 6) $S = \mathbb{R}-\{0\} =]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;+\infty[$
7) $S = \varnothing$ 8) $S =]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty[$
9) $S = \varnothing$

5.8
1) $S =]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$ 2) $S =]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]\,0\,;2\,[$
3) $S =]-\infty\,;1\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty[$ 4) $S =]\,0\,;\frac{4}{3}\,[$
5) $S =]-\infty\,;1\,[$ 6) $S =]-3\,;\frac{13}{4}\,[$
7) $S =]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;2\,[$ 8) $S =]\,\frac{7}{5}\,;5\,[$

5.9
1) $S =]-1\,;-\frac{1}{2}\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$ 2) $S =]-1\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$
3) $S =]-\infty\,;\frac{1}{2}\,]\,\cup\,]\,1\,;+\infty[$ 4) $S =]\,0\,;\frac{1}{4}\,[$
5) $S =]\,\frac{-3-\sqrt{7}}{2}\,;\frac{-3+\sqrt{7}}{2}\,[$ 6) $S =]-\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{6}\,]$
7) $S =]-\infty\,;-3\,[\,\cup\,]\,\frac{14}{11}\,;3\,[$ 8) $S =]-\infty\,;0\,[\,\cup\,[\,1\,;2\,[\,\cup\,[\,3\,;+\infty[$
9) $S =]\,\frac{5}{2}\,;3\,[\,\cup\,]\,4\,;+\infty[$ 10) $S =]-\infty\,;-3\,[\,\cup\,]-2\,;2\,[\,\cup\,[\,\frac{12}{5}\,;3\,[$

5.10
1) $S =]-\frac{2}{3};1\,]$ 2) $S = \varnothing$
3) $S =]\,\frac{5}{6}\,;\frac{8}{3}\,]$ 4) $S =]-\infty\,;-4\,[$
5) $S =]-\infty\,;-8\,[\,\cup\,[-\frac{1}{2}\,;+\infty[$ 6) $S = \mathbb{R}-\{2\} = \,]-\infty\,;2\,[\,\cup\,]\,2\,;+\infty[$
7) $S =]-\frac{2}{3}\,;2\,]$ 8) $S = \{\frac{1}{2}\}$
9) $S = \varnothing$ 10) $S =]-2\,;2\,[$
11) $S =]-5\,;-2\,[$ 12) $S =]\,\frac{2}{3}\,;\frac{5}{4}\,]$
13) $S =]-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;\frac{1}{3}\,[$ 14) $S = [-2\,;0\,[\,\cup\,]\,3\,;4\,]$

5.11 Résoudre ces petits problèmes :

1) Vous allez de Lausanne à Genève par l'autoroute à la vitesse de 120 km/h. Au retour vous prenez la route du lac et vous roulez à la vitesse moyenne de 80 km/h. Quelle est la vitesse moyenne pour le trajet aller et retour ?
2) L'inflation a été de 4 % en 1989 et 6 % en 1990 : quelle est l'inflation moyenne pendant ces deux ans ?
3) Vos notes en allemand sont 3 et 5 : quelle est votre moyenne ?

On définit pour $0 < a \leqslant b$:

la moyenne **arithmétique** $m = \dfrac{a+b}{2}$

la moyenne **géométrique** $g = \sqrt{ab}$

la moyenne **harmonique** $\dfrac{1}{h} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

Quel lien y a-t-il entre ces trois moyennes et les trois problèmes précédents ?

1) Comparer a, b et m.
2) Montrer que $h = \dfrac{2\,a\,b}{a+b}$ et $\sqrt{m\,h} = g$.
3) Comparer a, b et g.
4) Comparer a, b, m, g et h.
5) Dans quel cas a-t-on $m = g$? $g = h$? $m = h$?

5.12 Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Comparer :

1) $(1+x)\,(1+y)$ et $1+x+y$ 2) $x^3 + y^3$ et $x\,y\,(x+y)$

5.13 Certaines règles sont utilisées pour déterminer la quantité d'un médicament à donner à un enfant si on connaît celle à donner à un adulte.

Règle de Young $\mathrm{C} = \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}+12}d$

Règle de Cowling $\mathrm{C} = \dfrac{\mathrm{A}+1}{24}d$

où A représente l'âge de l'enfant, d la prescription pour un adulte et C la prescription pour un enfant.

1) Pour quels âges ces deux règles donnent-elles la même prescription pour un enfant ?
2) Quelle règle fournit le dosage le plus grand ?

5.14 Résoudre les inéquations (a et b sont des paramètres).

1) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} \geqslant 2\,(a+b)$ $a > b > 0$

2) $\dfrac{a-x}{b}-\dfrac{b-x}{a}\leqslant 0$ $\qquad a>b>0$

3) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{x-1}{b}\leqslant\dfrac{1-x}{1-a}+\dfrac{1-a}{b}$ $\qquad b>1>a>0$

4) $\dfrac{x-a}{b}-\dfrac{x-b}{a}\geqslant\dfrac{(a-b)^2}{ab}$ $\qquad b>a>0$

5) $\dfrac{a+x}{(a-2)^2}-\dfrac{1}{a-3}+\dfrac{x+3}{a^2-5\,a+6}\geqslant 0$ $\qquad a>3$

5.15 Résoudre les inéquations selon la valeur du paramètre.

1) $(a-1)x>a^2-1$

2) $a\,x+9<3\,x+a^2$

3) $m\,(m+4)x+4<m^2-4\,x$

4) $\dfrac{x-a}{2}+\dfrac{2\,x+3}{4}>\dfrac{a\,x}{6}$

5) $\dfrac{4\,x}{(m-1)^2}<\dfrac{2\,x-1}{m-1}$

6) $x\,(2\,m-1)<\dfrac{1-4\,m\,x}{2\,m-1}$

Réponses

5.11 1) 96 km/h $\quad$ 2) 4,995 23 % $\quad$ 3) 4

1) $a\leqslant m\leqslant b$ $\quad$ 3) $a\leqslant g\leqslant b$ $\quad$ 4) $a\leqslant h\leqslant g\leqslant m\leqslant b$

5) Si $a=b$ alors $a=h=g=m=b$; si $a<b$ alors $a<h<g<m<b$

5.12 1) $(1+x)\,(1+y)\geqslant 1+x+y$ et l'égalité est satisfaite si seulement si $x=0$ ou $y=0$.

2) $x^3+y^3\geqslant x\,y\,(x+y)$ et l'égalité est satisfaite si et seulement si $x=y$.

5.13 1) $\mathrm{A}_1=\frac{11-\sqrt{73}}{2}\approx 1{,}23$ et $\mathrm{A}_1=\frac{11+\sqrt{73}}{2}\approx 9{,}77$

2) Si $0<\mathrm{A}<\mathrm{A}_1$: Cowling ; si $\mathrm{A}_1<\mathrm{A}<\mathrm{A}_2$: Young ; si $\mathrm{A}_2<\mathrm{A}$: Cowling

5.14 1) $x\geqslant 2\,a\,b$ $\quad$ 2) $x\geqslant a+b$ $\quad$ 3) $x\leqslant a$

4) $x\leqslant 2\,a$ $\quad$ 5) $x\geqslant -2$

5.15

1) $a<1$ $\quad x<a+1$; $a=1$ impossible; $a>1$ $\quad x>a+1$

2) $a<3$ $\quad x>a+3$; $a=3$ impossible; $a>3$ $\quad x<a+3$

3) $m\neq -2$ $\quad x<\dfrac{m-2}{m+2}$; $m=-2$ impossible

4) $a<6$ $\quad x>\dfrac{3\,(2\,a-3)}{2\,(6-a)}$; $a=6$ impossible; $a>6$ $\quad x<\dfrac{3\,(2\,a-3)}{2\,(6-a)}$

5) $m<3$ $\quad x<\dfrac{1-m}{2\,(3-m)}$; $m=3$ impossible; $m>3$ $\quad x>\dfrac{1-m}{2\,(3-m)}$

6) $m<\frac{1}{2}$ $\quad x>\dfrac{1}{4\,m^2+1}$; $m>\frac{1}{2}$ $\quad x<\dfrac{1}{4\,m^2+1}$