

5.9

$$1) \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2-1} > 0$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\frac{1(x+1)+x}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} > 0$$

		-1		$-\frac{1}{2}$		1		
$2x+1$		-		-	0	+		+
$x-1$		-		-	0	-		+
$x+1$		-		+	0	+		+
$F(x)$		-		+	0	-		+

$$S =]-1; -\frac{1}{2}[\cup]1; +\infty[$$

$$2) x > \frac{1}{x}$$

$$x - \frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{x^2-1}{x} > 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} > 0$$

		-1		0		1	
$x-1$		-		-		-	0
$x+1$		-	0	+		+	0
x		-	0	-		+	0
$F(x)$		-	0	+		-	0

$$S =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$$

$$3) \frac{4x-3}{x-1} \geq 2$$

$$\frac{4x-3}{x-1} - 2 \geq 0$$

$$\frac{(4x-3)-2(x-1)}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{2x-1}{x-1} \geq 0$$

$2x-1$		-	$\frac{1}{2}$	0	+		+
$x-1$		-			-		+
F(x)		+		0	-		+

$$S =]-\infty; \frac{1}{2}] \cup]1; +\infty[$$



La borne 1 doit être exclue, car c'est une valeur qui annule le dénominateur et pour laquelle la fraction rationnelle n'est pas définie ; c'est pourquoi elle est marquée par une double barre.

$$\begin{aligned}
4) \quad & \frac{x-1}{x^3} - \frac{x+1}{x^3-x^2} < \frac{3}{2x^2-x^3-x} \\
& \frac{x-1}{x^3} - \frac{x+1}{x^3-x^2} - \frac{3}{2x^2-x^3-x} < 0 \\
& \frac{x-1}{x^3} - \frac{x+1}{x^2(x-1)} - \frac{3}{-x(x^2-2x+1)} < 0 \\
& \frac{x-1}{x^3} - \frac{x+1}{x^2(x-1)} + \frac{3}{x(x-1)^2} < 0 \\
& \frac{(x-1)^3 - x(x-1)(x+1) + 3x^2}{x^3(x-1)^2} < 0 \\
& \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + x + 3x^2}{x^3(x-1)^2} < 0 \\
& \frac{4x-1}{x^3(x-1)^2} < 0
\end{aligned}$$

$4x-1$		-		0	$\frac{1}{4}$	+		+
x^3		-		+		+		+
$(x-1)^2$		+		+		+		+
F(x)		+		-	0	+		+

$$S =]0; \frac{1}{4}[$$

$$\begin{aligned}
5) \quad & \frac{3x^2+12x+1}{2x^2+6x+1} \geq 2 \\
& \frac{3x^2+12x+1}{2x^2+6x+1} - 2 \geq 0 \\
& \frac{(3x^2+12x+1) - 2(2x^2+6x+1)}{2x^2+6x+1} \geq 0 \\
& \frac{-x^2-1}{2x^2+6x+1} \geq 0
\end{aligned}$$

$-x^2 - 1$	$-$	x_1	$-$	x_2	$-$	$\Delta = 0^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = -4 < 0$
$2x^2 + 6x + 1$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 28 = 2^2 \cdot 7 > 0$
$F(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$x_1 = \frac{-6-2\sqrt{7}}{2 \cdot 2} = \frac{-3-\sqrt{7}}{2}$
$S =] \frac{-3-\sqrt{7}}{2} ; \frac{-3+\sqrt{7}}{2} [$						$x_2 = \frac{-6+2\sqrt{7}}{2 \cdot 2} = \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$



Les bornes $x_1 = \frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{-3+\sqrt{7}}{2}$ doivent être exclues, car ce sont des valeurs qui annulent le dénominateur et pour lesquelles la fraction rationnelle n'est pas définie ; c'est pourquoi elles sont marquées par une double barre.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \frac{2x}{4x^2 - 1} \geq \frac{2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} \\
 & \frac{2x}{4x^2 - 1} - \frac{2x + 1}{4x^2 - 4x + 1} \geq 0 \\
 & \frac{2x}{(2x - 1)(2x + 1)} - \frac{2x + 1}{(2x - 1)^2} \geq 0 \\
 & \frac{2x(2x - 1) - (2x + 1)^2}{(2x - 1)^2(2x + 1)} \geq 0 \\
 & \frac{-6x - 1}{(2x - 1)^2(2x + 1)} \geq 0
 \end{aligned}$$

		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	
$-6x - 1$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$(2x - 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$F(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$-$

$$S =] -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{6}]$$



La borne $-\frac{1}{2}$ doit être exclue, car c'est une valeur qui annule le dénominateur et pour laquelle la fraction rationnelle n'est pas définie ; c'est pourquoi elle est marquée par une double barre.

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \frac{5x^2 + 2}{x^2 - 9} > \frac{5x - 4}{x - 3} \\
 & \frac{5x^2 + 2}{x^2 - 9} - \frac{5x - 4}{x - 3} > 0 \\
 & \frac{5x^2 + 2}{(x - 3)(x + 3)} - \frac{5x - 4}{x - 3} > 0 \\
 & \frac{(5x^2 + 2) - (x + 3)(5x - 4)}{(x - 3)(x + 3)} > 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{-11x + 14}{(x - 3)(x + 3)} > 0$$

			⁻³	^{$\frac{14}{11}$}		³		
$-11\,x + 14$		+		+	0	-		-
$x - 3$		-		-		-		+
$x + 3$		-		+		+		+
$F(x)$		+		-	0	+		-

$$S =] - \infty ; -3[\cup] \frac{14}{11} ; 3[$$

$$8) \frac{1}{x^2 - 2x} \leq 1 - \frac{2}{x}$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x} - 1 + \frac{2}{x} \leq 0$$

$$\frac{1}{x(x - 2)} - 1 + \frac{2}{x} \leq 0$$

$$\frac{1 - 1 \cdot x(x - 2) + 2(x - 2)}{x(x - 2)} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 4x - 3}{x(x - 2)} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x(x - 2)} \geq 0$$

$$\frac{(x - 1)(x - 3)}{x(x - 2)} \geq 0$$

			0		1		2		3	
$x - 1$		-		-	0	+		+		+
$x - 3$		-		-		-		-	0	+
x		-		+		+		+		+
$x - 2$		-		-		-		+		+
$F(x)$		+		-	0	+		-	0	+

$$S =] - \infty ; 0[\cup [1 ; 2[\cup [3 ; +\infty[$$

$$9) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} > 1$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 12} - 1 > 0$$

$$\frac{(x^2 - 3x + 2) - 1(x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 7x + 12} > 0$$

$$\frac{4x - 10}{x^2 - 7x + 12} > 0$$

$$\frac{2(2x - 5)}{(x - 3)(x - 4)} > 0$$

		$\frac{5}{2}$		3		4		
2		+		+		+		+
$2x - 5$		-	0	+		+		+
$x - 3$		-		-		+		+
$x - 4$		-		-		-		+
F(x)		-	0	+		-		+

$$S =]\frac{5}{2}; 3[\cup]4; +\infty[$$

$$10) \quad \frac{5}{x^2 + 5x + 6} - \frac{2}{x^2 - 4} \geq \frac{3}{x^2 - 9}$$

$$\frac{5}{x^2 + 5x + 6} - \frac{2}{x^2 - 4} - \frac{3}{x^2 - 9} \geq 0$$

$$\frac{5}{(x + 2)(x + 3)} - \frac{2}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{3}{(x - 3)(x + 3)} \geq 0$$

$$\frac{5(x - 2)(x - 3) - 2(x - 3)(x + 3) - 3(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)} \geq 0$$

$$\frac{-25x + 60}{(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)} \geq 0$$

$$\frac{-5(5x - 12)}{(x - 2)(x + 2)(x - 3)(x + 3)} \geq 0$$

		-3		-2		2		$\frac{12}{5}$		3		
-5		-		-		-		-		-		-
$5x - 12$		-		-		-		-	0	+		+
$x - 2$		-		-		-		+		+		+
$x + 2$		-		-		+		+		+		+
$x - 3$		-		-		-		-		-		+
$x + 3$		-		+		+		+		+		+
F(x)		+		-		+		-	0	+		-

$$S =]-\infty; -3[\cup]-2; 2[\cup [\frac{12}{5}; 3[$$