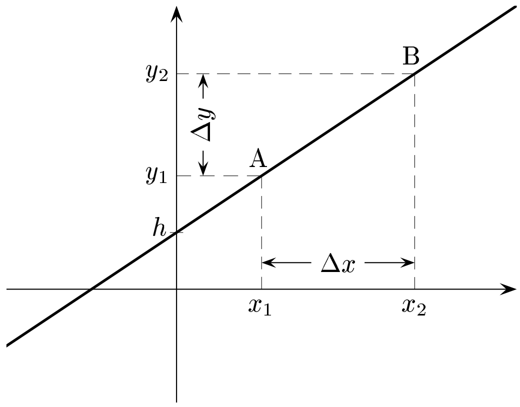
6 Graphes des fonctions affines et quadratiques

Fonctions affines

Une fonction **affine** est une fonction de la forme $f(x) = m\,x + h$.
Sa représentation graphique est une droite.



Soient $\mathrm{A}(x_1\,;y_1)$ et $\mathrm{B}(x_2\,;y_2)$ deux points distincts d'une telle droite.

De $\begin{cases} y_1 = m\,x_1 + h \\ y_2 = m\,x_2 + h \end{cases}$ on déduit : $y_2 - y_1 = m\,x_2 - m\,x_1 = m\,(x_2 - x_1)$.

Il en résulte $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Le coefficient m s'appelle la **pente** de la droite $y = m\,x + h$.

On constate que cette droite passe par le point $(0\,;h)$, car $h = m \cdot 0 + h$.
Le coefficient h est appelé l'**ordonnée à l'origine**.

Cas particuliers

– Lorsque $f(x) = m\,x$, la fonction f est dite **linéaire**.
  Son graphe est une droite de pente m qui passe par l'origine.
– Lorsque $f(x) = h$, la fonction f est appelée fonction **constante**.
  Son graphe est une droite horizontale passant par le point $(0\,;h)$.

6.1 Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

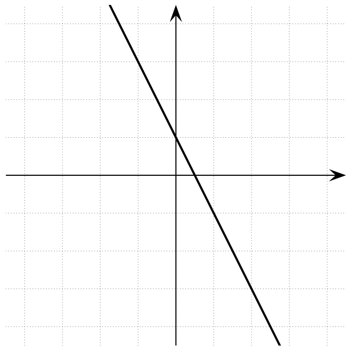
1) $f(x) = x$	2) $f(x) = -x$	3) $f(x) = 4\,x$
4) $f(x) = -4\,x$	5) $f(x) = \frac{1}{4}\,x$	6) $f(x) = -\frac{1}{4}\,x$

6.2 Représenter graphiquement les fonctions suivantes :

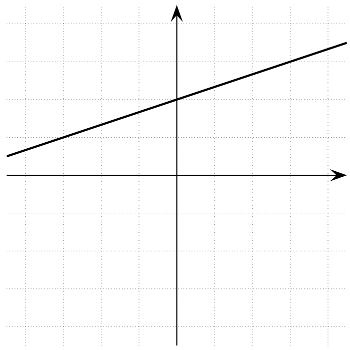
1) $f(x) = 2\,x + 1$	2) $f(x) = 2\,x - 1$	3) $f(x) = 2\,x + 3$
4) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 1$	5) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x - 1$	6) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 3$

6.3 Déterminer les fonctions dont on donne les représentations graphiques.

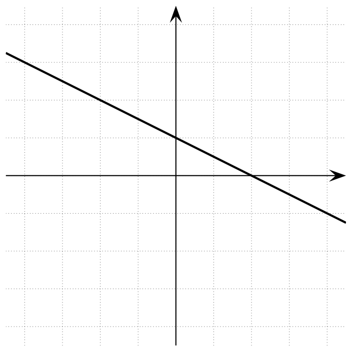
1)



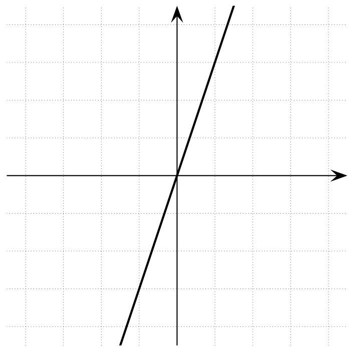
2)



3)



4)



6.4 Représenter graphiquement la fonction $f(x) = -2\,x + 4$.
Déduire du graphique les solutions des équations et inéquations suivantes :

1) $-2\,x + 4 = 0$ 2) $-2\,x + 4 > 0$ 3) $-2\,x + 4 < 0$

6.5 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

1) $2\,x + 5 > 1$ 2) $5 - 2\,x \geqslant 1$ 3) $-4\,x - 5 < x + 5$

6.6 Dessiner les graphes des fonctions $f(x) = -2\,x + 6$ et $g(x) = \frac{1}{2}\,x - 4$.
Résoudre à partir du graphique les équations et inéquations suivantes.

1) $f(x) = 0$ 2) $f(x) = g(x)$ 3) $f(x) = x$

4) $f(x) < 0$ 5) $f(x) > g(x)$ 6) $f(x) \geqslant x$

6.7 Résoudre graphiquement les systèmes d'équations.

1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = -6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5\,x + y = 3 \\ 4\,x - 2\,y = 8 \end{cases}$

6.8 1) Trouver la fonction affine dont le graphe passe par les points $\mathrm{A}(7\,;-2)$ et $\mathrm{B}(-3\,;1)$.

2) Trouver la fonction affine dont le graphe coupe l'axe des abscisses en I$(5\,;0)$ et dont la pente vaut $-\frac{5}{8}$.

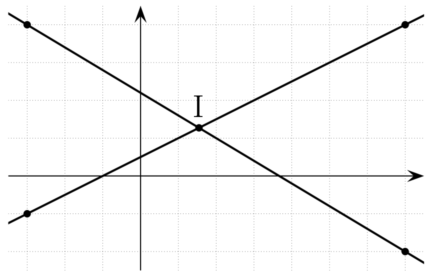
3) Trouver la fonction affine f telle que $f(2) = 5$ et dont le graphe passe par le point A$(5\,;5)$.

4) Trouver l'abscisse du point C$(x\,;10)$ sachant que les points A$(1\,;1)$, B$(3\,;-2)$ et C sont alignés.

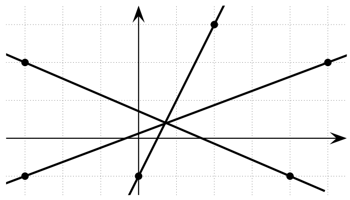
6.9 1) Calculer les coordonnées du point d'intersection I des deux droites dessinées ci-contre.

2) Trouver la fonction f dont le graphe est une droite qui passe par l'origine et par le point I.

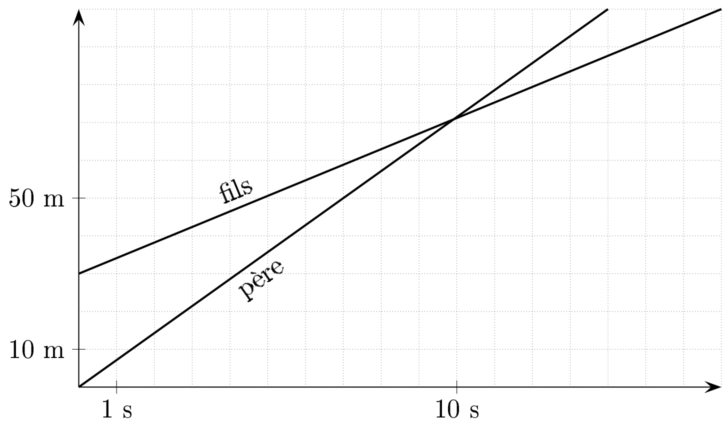
3) Trouver la fonction g dont le graphe est une droite parallèle au graphe de f et qui passe par le point P$(2\,;-1)$.



6.10 Les trois droites se coupent-elles en un point ou forment-elles un triangle ?



6.11 Un père défie son fils au 100 m et lui laisse 30 m d'avance. Les graphes simplifiés de cette course sont donnés ci-dessous.



1) Qui a gagné ? Avec combien de secondes d'avance ?

2) Quelle distance les sépare lorsque le vainqueur franchit la ligne d'arrivée ?

3) Quelle a été la vitesse du père, celle du fils ?

4) Le père et le fils ont-ils été côte à côte ? Si oui, quelle distance avait parcourue le père ?

Fonctions quadratiques

Une fonction **quadratique** est une fonction de la forme $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$.

Rappelons qu'une fonction quadratique peut aussi s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) = a\,x^2 + b\,x + c &= a\left(x^2 + \tfrac{b}{a}\,x + \tfrac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\tfrac{b}{2\,a}\,x + \tfrac{b^2}{4\,a^2} - \tfrac{b^2}{4\,a^2} + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \tfrac{b}{2\,a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4\,a\,c}{4\,a^2}\right) = a\left(x + \tfrac{b}{2\,a}\right)^2 - \tfrac{b^2-4\,a\,c}{4\,a} = a\left(x + \tfrac{b}{2\,a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4\,a} \end{aligned}$$

La représentation graphique d'une fonction quadratique est une parabole admettant $x = -\frac{b}{2\,a}$ comme axe de symétrie et ayant pour sommet $\mathrm{S}\left(-\frac{b}{2\,a}\,;-\frac{\Delta}{4\,a}\right)$.

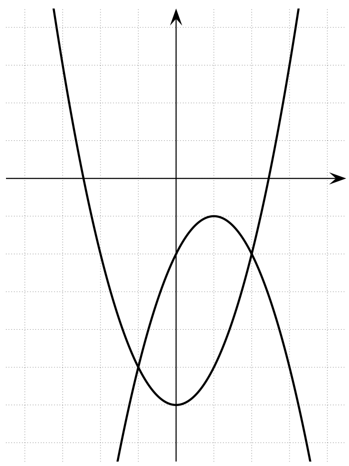
La position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses est établie à partir de l'étude de son signe.

Comme $c = a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c$, la parabole coupe l'axe des ordonnées en $(0\,;c)$.

6.12 Esquisser le graphe des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^2 - 4\,x$
2) $f(x) = x^2 + 1$
3) $f(x) = 2\,x^2 - 4\,x + 2$
4) $f(x) = -x^2 + 4$
5) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + 2\,x - 2$
6) $f(x) = -x^2 + 2\,x - 2$

6.13 Voici les graphes des fonctions $f(x) = x^2 - 6$ et $g(x) = -x^2 + 2\,x - 2$.



En déduire les solutions des équations et inéquations suivantes :

1) $f(x) = 3$
2) $g(x) = 0$
3) $f(x) = g(x)$
4) $g(x) \geqslant 0$
5) $f(x) < 3$
6) $f(x) > 3$
7) $g(x) \leqslant 0$
8) $f(x) < g(x)$
9) $g(x) \geqslant -2$

6.14 Calculer le point d'intersection des graphes de $f(x) = -x^2 + 13\,x - 48$ et de $g(x) = x^2 - 11\,x + 24$, puis représenter graphiquement f et g dans un même système d'axes.

6.15 Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole

1) de sommet $S(2\,;5)$ et passant par le point $A(4\,;-1)$;
2) qui coupe l'axe Ox en $x=-3$ et $x=1$ et qui est tangente à la droite $y=8$.

6.16 Une parabole passe par l'origine et les points $P(3\,;-6)$ et $Q(-3\,;12)$.
Quelle est son équation ?

6.17

1) Représenter sur un même graphique la droite $y=2\,x-7$ et la parabole $y=(x-3)^2$.
2) Vérifier que la parabole est tangente à la droite et calculer les coordonnées du point de contact.

6.18 Déterminer la fonction dont le graphe est une parabole de sommet $S(1\,;2)$ tangente à la droite $y=x$.

6.19 Un quincailler a 300 tondeuses à gazon à vendre pour la saison. Il sait qu'au prix de 400 fr. chacune, il les vendra toutes. Il sait que pour chaque augmentation de 4 fr. du prix, il perdra 2 ventes.

1) Exprimer le revenu en fonction du nombre x d'augmentations de 4 fr.
2) À quel prix le quincailler devrait-il vendre ses tondeuses pour avoir un revenu maximal ?
3) Quel sera ce revenu maximal ?

6.20 On a une longue pièce de fer-blanc de 30 cm de large. Le long de chacun des rebords, on redresse deux bandes de largeurs égales en les ramenant dans une position verticale formant ainsi une gouttière.

Quelle doit être la largeur des bandes que l'on relève, si l'on veut que la gouttière ait une capacité maximale, c'est-à-dire que l'aire d'une coupe transversale soit maximale ?

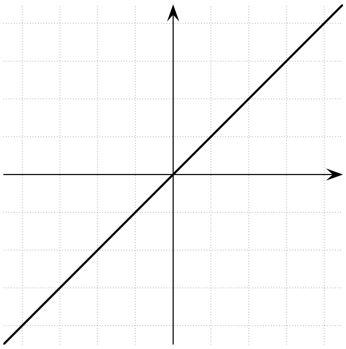
Indication : exprimer l'aire transversale comme fonction de la largeur x des bandes que l'on relève.

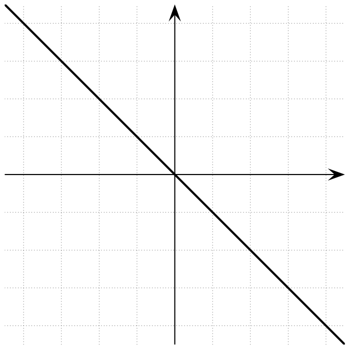
6.21 Sur la limite nord de son terrain, Louis a une montagne qu'il peut utiliser pour former un des côtés d'un enclos rectangulaire pour ses chiens. Pour les trois autres côtés, il dispose de 80 m de clôture.

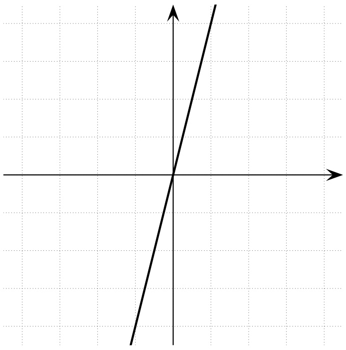
Quelle est l'aire maximale qu'il peut donner à son enclos ?

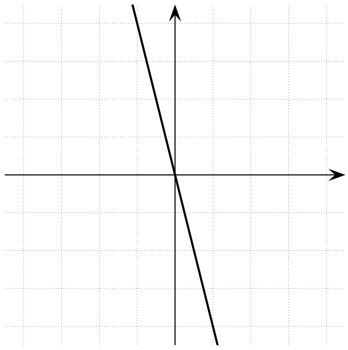
Réponses

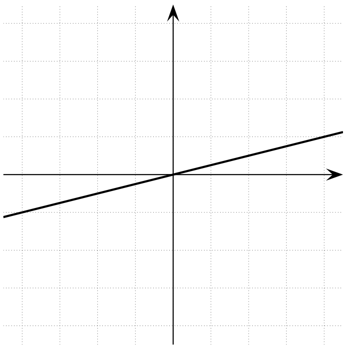
6.1

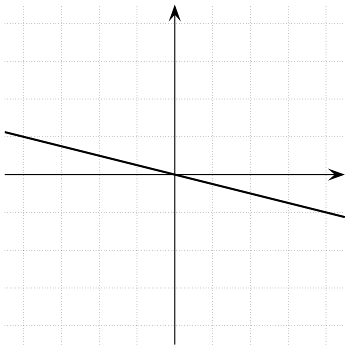
1) 

2) 

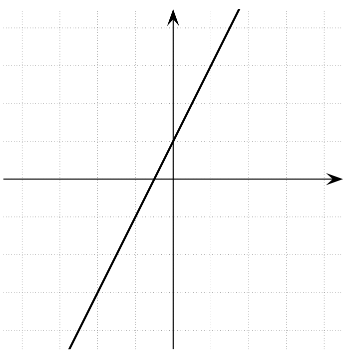
3) 

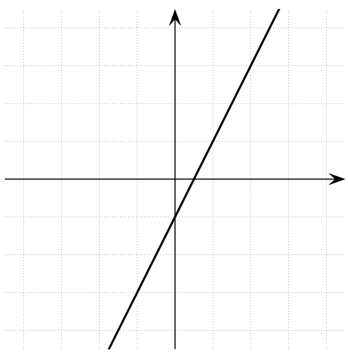
4) 

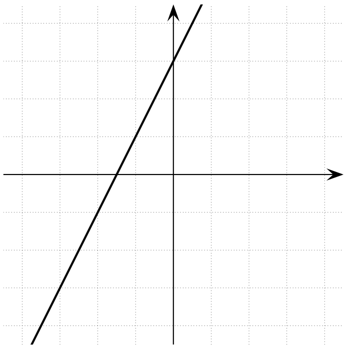
5) 

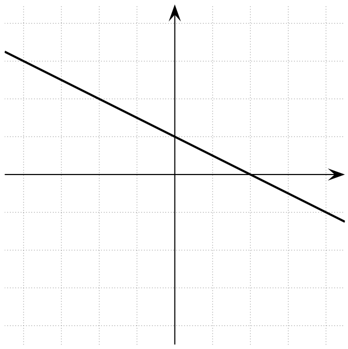
6) 

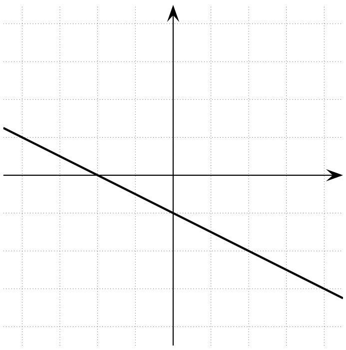
6.2

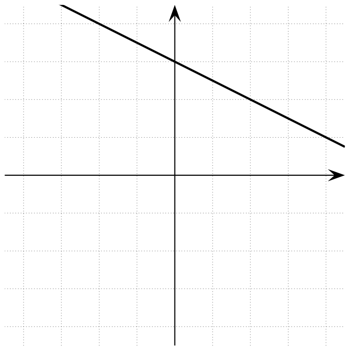
1) 

2) 

3) 

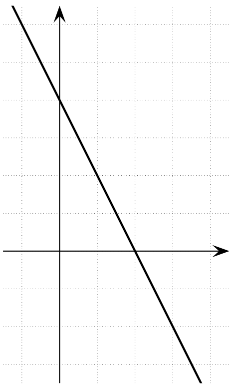
4) 

5) 

6) 

6.3
1) $f(x) = -2\,x + 1$
2) $f(x) = \frac{1}{3}\,x + 2$
3) $f(x) = -\frac{1}{2}\,x + 1$
4) $f(x) = 3\,x$

6.4



1) $\mathrm{S} = \{2\}$
2) $\mathrm{S} = \left]-\infty\,;2\right[$
3) $\mathrm{S} = \left]2\,;+\infty\right[$

6.5
1) $\mathrm{S} = \left]-2\,;+\infty\right[$
2) $\mathrm{S} = \left]-\infty\,;2\right]$
3) $\mathrm{S} = \left]-2\,;+\infty\right[$

6.6
1) $\mathrm{S} = \{3\}$
2) $\mathrm{S} = \{4\}$
3) $\mathrm{S} = \{2\}$
4) $\mathrm{S} = \left]3\,;+\infty\right[$
5) $\mathrm{S} = \left]-\infty\,;4\right[$
6) $\mathrm{S} = \left]-\infty\,;2\right]$

6.7
1) $\mathrm{S} = \{(-1\,;5)\}$
2) $\mathrm{S} = \{(1\,;-2)\}$

6.8
1) $f(x) = -\frac{3}{10}\,x + \frac{1}{10}$
2) $f(x) = -\frac{5}{8}\,x + \frac{25}{8}$
3) $f(x) = 5$
4) $\mathrm{C}(-5\,;10)$

6.9 1) $\mathrm{I}\left(\frac{17}{11}\,;\frac{14}{11}\right)$ 2) $f(x) = \frac{14}{17}\,x$ 3) $g(x) = \frac{14}{17}\,x - \frac{45}{17}$

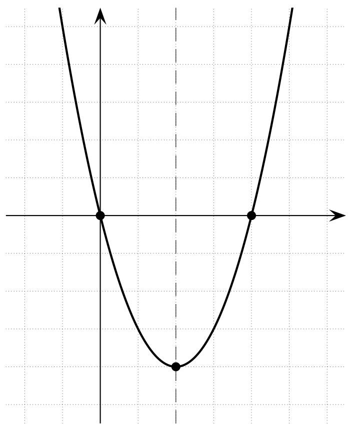
6.10 Elles forment un triangle.

6.11 1) Le père a gagné avec 3 s d'avance 2) $\frac{210}{17} \approx 12{,}35$ m

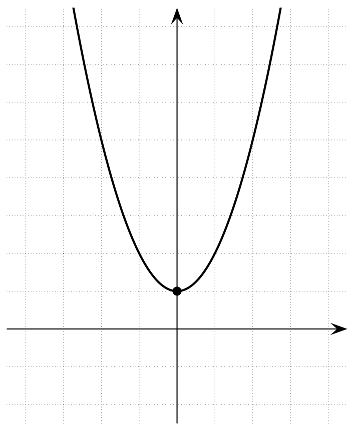
3) père : $\frac{50}{7} \approx 7{,}14$ m/s
fils : $\frac{70}{17} \approx 4{,}12$ m/s

4) $\frac{425}{6} \approx 70{,}83$ m

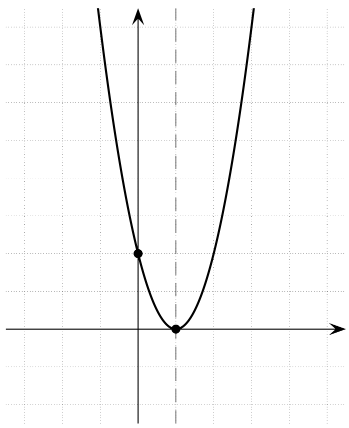
6.12 1)



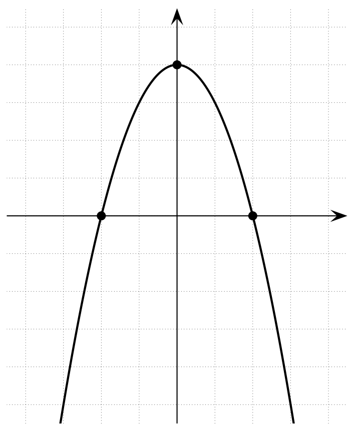
2)



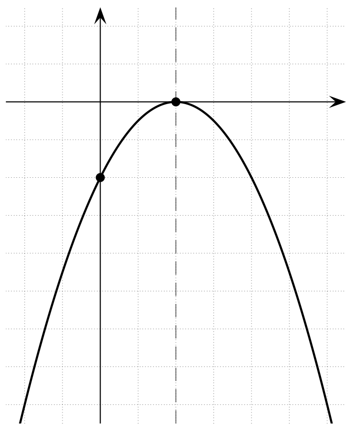
3)



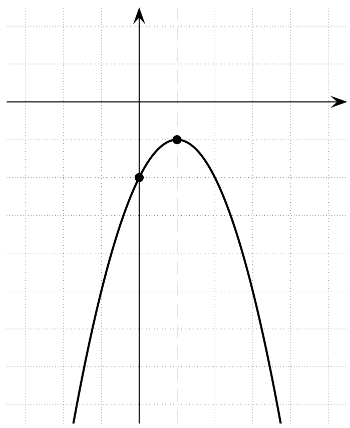
4)



5)

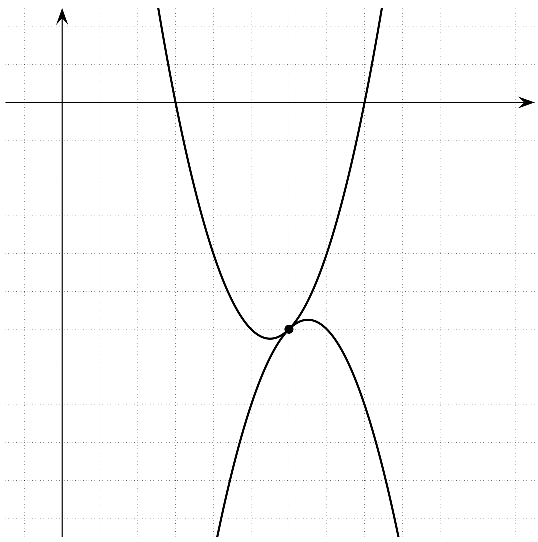


6)



6.13 1) $S = \{-3\,;3\}$ 2) $S = \varnothing$ 3) $S = \{-1\,;2\}$
4) $S = \varnothing$ 5) $S =]-3\,;3[$ 6) $S =]-\infty\,;-3[\cup]3\,;+\infty[$
7) $S = \mathbb{R}$ 8) $S =]-1\,;2[$ 9) $S = [0\,;2]$

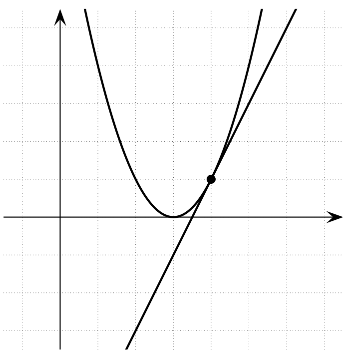
6.14 $I(6\,;-6)$



6.15 1) $f(x) = -\frac{3}{2}\,(x-2)^2 + 5$ 2) $f(x) = -2\,(x+3)\,(x-1)$

6.16 $y = \frac{1}{3}\,x^2 - 3\,x$

6.17



$(4\,;1)$

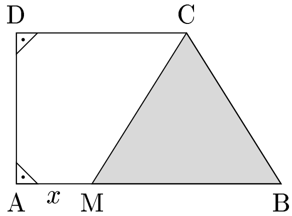
6.18 $f(x) = \frac{1}{4}\,(x-1)^2 + 2$

6.19 1) $f(x) = (300 - 2\,x)\,(400 + 4\,x) = -8\,x^2 + 400\,x + 120\ 000$
2) 500 fr. 3) 125 000 fr.

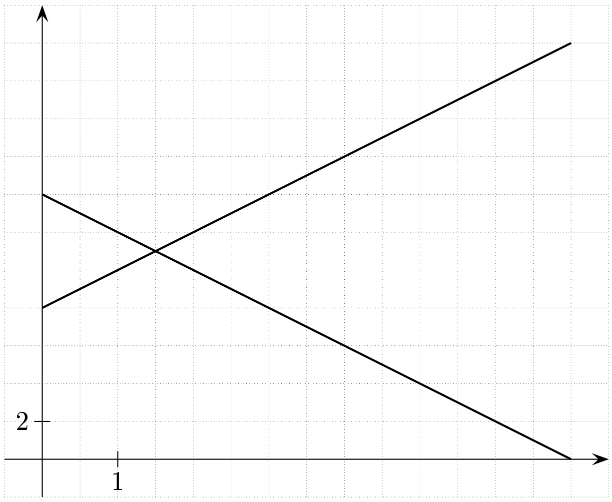
6.20 7,5 cm

6.21 800 m^2

6.22 ABCD est un trapèze rectangle et M un point du segment AB.
On note x la distance AM.



Le graphique ci-dessous représente les aires $f(x)$ et $g(x)$ du triangle CMB et du trapèze AMCD. À partir de ce graphique, retrouver les dimensions AB, AD et CD du trapèze ABCD.

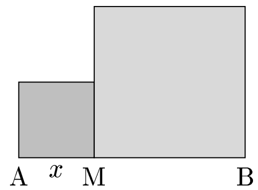


6.23 Soient les points A$(4\,;0)$, B$(0\,;3)$, C$(4\,;3)$ et E$(1\,;\frac{3}{4})$.

1) Faire un graphique (unité : 2 cm sur chaque axe).
2) (a) Donner une équation de la droite OC.
   (b) Le point E appartient-il à la droite OC ?
3) On trace :
   – la parallèle à l'axe des abscisses passant par E : elle coupe l'axe des ordonnées en F et la droite AC en G ;
   – la parallèle à l'axe des ordonnées passant par E : elle coupe l'axe des abscisses en H et la droite BC en I.

   (a) Donner des équations des droites FG et HI.
   (b) Quelles sont les coordonnées des points F, G, H et I ?
   (c) Déterminer une équation de chacune des droites FI et HG.
   (d) En déduire les coordonnées du point K intersection des droites FI et HG.
   (e) Les droites FI, HG et OC sont-elles concourantes ?

6.24 Sur un segment AB de longueur 6 cm, on place un point M et on construit les carrés de côtés AM et MB comme ci-dessous :



On s'intéresse à l'aire totale de la figure, exprimée en cm^2.

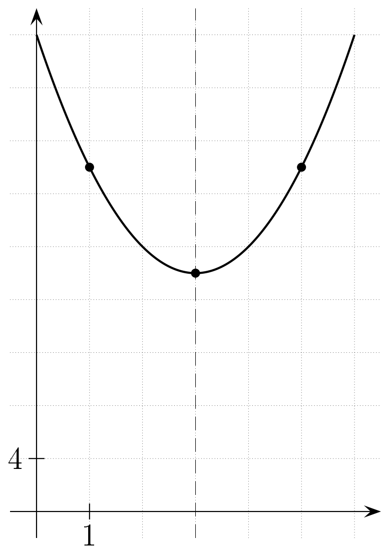
1) On note x la longueur AM et $\mathcal{A}(x)$ l'aire de la figure formée par les deux carrés. Déterminer la fonction $\mathcal{A}(x)$.
2) Représenter graphiquement la fonction $\mathcal{A}(x)$.
3) Par lecture graphique, puis par calcul, déterminer x de telle sorte que $\mathcal{A}(x) = 26$.
4) Pour quelle valeur de x l'aire de la figure est-elle minimale ?

Réponses

6.22 AB = 7 AD = 4 CD = 4

6.23
2) OC : $y = \frac{3}{4}\,x$ E $\in$ OC
3) FG : $y = \frac{3}{4}$ HI : $x = 1$
F$(0\,;\frac{3}{4})$ G$(4\,;\frac{3}{4})$ H$(1\,;0)$ I$(1\,;3)$
FI : $y = \frac{9}{4}\,x + \frac{3}{4}$ HG : $y = \frac{1}{4}\,x - \frac{1}{4}$
K$(-\frac{1}{2}\,;-\frac{3}{8})$
Les droites FI, HG et OC sont concourantes en K.

6.24
1) $\mathcal{A}(x) = 2\,x^2 - 12\,x + 36 = 2\,(x-3)^2 + 18$
2)



3) $x = 1$ ou $x = 5$
4) $x = 3$

6.25 Étudier le signe des fonctions polynomiales et esquisser leur graphe.

1) $f(x) = x^3 + x^2 - 2\,x$

2) $f(x) = -x^3 + 3\,x^2 + x - 3$

3) $f(x) = x^3 - 3\,x + 2$

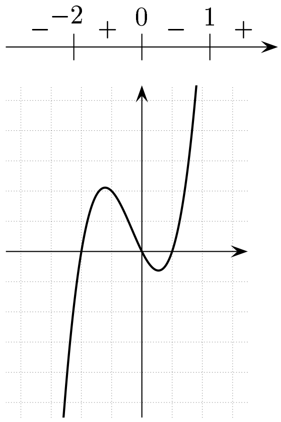
4) $f(x) = 4\,x^2 - x^4$

5) $f(x) = x^5 - 5\,x^3 + 4\,x$

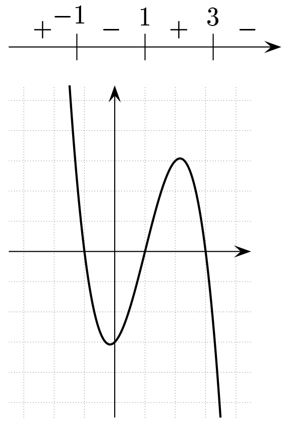
6) $f(x) = 4\,x^5 - 12\,x^4 + 9\,x^3$

Réponses

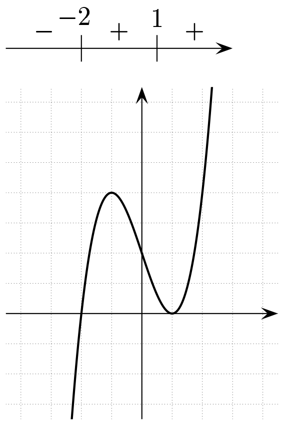
6.25 1)



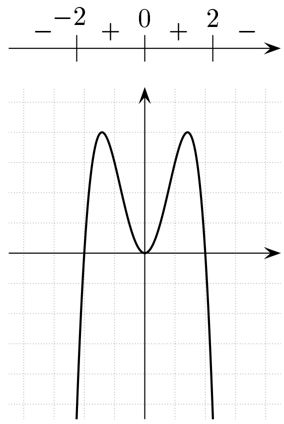
2)



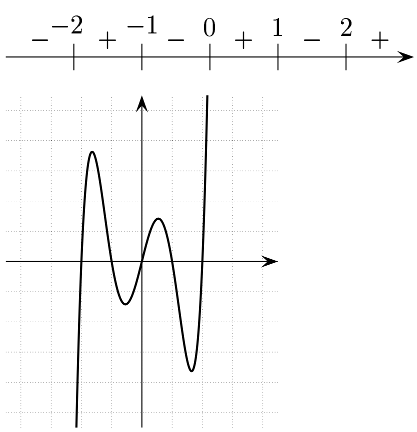
3)



4)



5)



6)