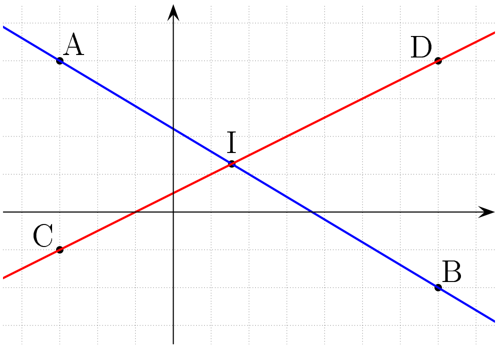
6.9 1)



Recherchons la fonction affine $f(x) = m\,x + h$ dont le graphe passe par les points $\mathrm{A}(-3\,;4)$ et $\mathrm{B}(7\,;-2)$.

Cela revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -3\,m + h = 4 \\ 7\,m + h = -2 \end{cases}$$

En soustrayant ces équations, on trouve $10\,m = -6$, d'où $m = -\frac{3}{5}$.
On en tire $h = 4 + 3\,m = 4 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{11}{5}$.

On a ainsi obtenu l'équation de la droite AB : $y = -\frac{3}{5}\,x + \frac{11}{5}$.

Déterminons à présent la fonction affine $g(x) = m\,x + h$ dont le graphe passe par les points $\mathrm{C}(-3\,;-1)$ et $\mathrm{D}(7\,;4)$.

En d'autres termes, résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} -3\,m + h = -1 \\ 7\,m + h = 4 \end{cases}$$

La soustraction de ces équations fournit $10\,m = 5$, de sorte que $m = \frac{1}{2}$.
Par conséquent $h = 3\,m - 1 = 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

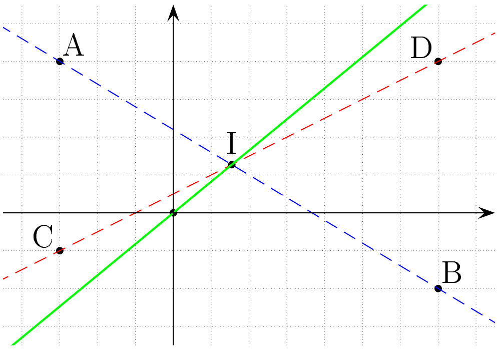
On a donc trouvé l'équation de la droite CD : $y = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection I consiste à résoudre le système constitué des équations des droites AB et CD :

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{5}\,x + \frac{11}{5} \\ y = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Par substitution, on obtient $-\frac{3}{5}\,x + \frac{11}{5} = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}$.
En multipliant cette équation par 10, on trouve $-6\,x + 22 = 5\,x + 5$.
On en déduit $-11\,x = -17$, puis $x = \frac{17}{11}$.
Par suite $y = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{11} + \frac{1}{2} = \frac{14}{11}$.

En résumé, on a calculé les coordonnées du point $\mathrm{I}\left(\frac{17}{11}\,;\frac{14}{11}\right)$.

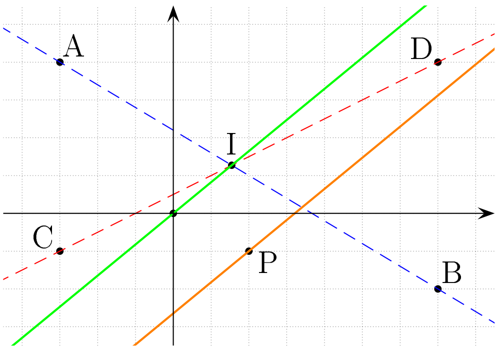
2) 

Soit f la fonction dont le graphe est une droite passant par l'origine et le point I.

Puisque le graphe de f passe par l'origine, la fonction f est linéaire : elle est donc de la forme $f(x) = m\,x$.

Attendu que le graphe de f passe par $\mathrm{I}\big(\frac{17}{11}\,;\frac{14}{11}\big)$, on a $\frac{14}{11} = f\big(\frac{17}{11}\big) = \frac{17}{11}\,m$. Il en résulte $m = \frac{14}{17}$.

On conclut que la fonction recherchée est $f(x) = \frac{14}{17}\,x$.

3) 

Comme les graphes des fonctions f et g forment deux droites parallèles, les fonctions f et g possèdent la même pente $m = \frac{14}{17}$.

Dès lors, on peut écrire $g(x) = \frac{14}{17}\,x + h$.

Par ailleurs, le graphe de la fonction g doit passer par le point $\mathrm{P}(2\,;-1)$, c'est-à-dire $-1 = g(2) = \frac{14}{17} \cdot 2 + h$, d'où suit $h = -1 - \frac{28}{17} = -\frac{45}{17}$.

On conclut que la fonction recherchée s'écrit $g(x) = \frac{14}{17}\,x - \frac{45}{17}$.