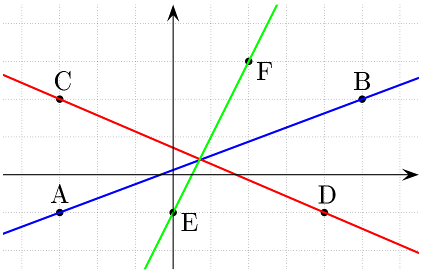
6.10



Commencons par déterminer l'équation de la droite qui passe par $A(-3\,;-1)$ et $B(5\,;2)$. En d'autres termes, résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} -3\,m + h = -1 \\ \;\;5\,m + h = \;\;\,2 \end{cases}$$

La soustraction de ces équations donne $8\,m = 3$, d'où résulte $m = \frac{3}{8}$.

Ainsi $h = 3\,m - 1 = 3 \cdot \frac{3}{8} - 1 = \frac{1}{8}$.

L'équation de la droite AB est donc $y = \frac{3}{8}\,x + \frac{1}{8}$.

Recherchons à présent l'équation de la droite passant par $C(-3\,;2)$ et $D(4\,;-1)$. Il s'agit ici de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} -3\,m + h = \;\;\,2 \\ \;\;4\,m + h = -1 \end{cases}$$

En soustrayant ces équations, on trouve $7\,m = -3$, puis $m = -\frac{3}{7}$.

Dès lors, $h = 3\,m + 2 = 3 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) + 2 = \frac{5}{7}$.

Ainsi la droite CD admet pour équation $y = -\frac{3}{7}\,x + \frac{5}{7}$.

Il reste encore à calculer l'équation de la droite passant par $E(0\,;-1)$ et $F(2\,;3)$, c'est-à-dire à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \qquad\; h = -1 \\ 2\,m + h = \;\;\,3 \end{cases}$$

La première équation donne immédiatement $h = -1$ que l'on substitue dans la seconde : $2\,m - 1 = 3$ implique $m = 2$.

L'équation de la droite EF s'écrit donc $y = 2\,x - 1$.

Calculons maintenant les coordonnées du point d'intersection I entre les droites AB et CD. Pour cela, il faut résoudre le système constitué des équations des droites AB et CD :

$$\begin{cases} y = \;\;\,\frac{3}{8}\,x + \frac{1}{8} \\ y = -\frac{3}{7}\,x + \frac{5}{7} \end{cases}$$

Par substitution, on trouve $\frac{3}{8}\,x + \frac{1}{8} = -\frac{3}{7}\,x + \frac{5}{7}$.

En multipliant par 56, on obtient : $21\,x + 7 = -24\,x + 40$.

Donc $45\,x = 33$ et $x = \frac{33}{45} = \frac{11}{15}$.

Par conséquent $y = \frac{3}{8} \cdot \frac{11}{15} + \frac{1}{8} = \frac{2}{5}$.

On a ainsi trouvé $I\left(\frac{11}{15}\,;\frac{2}{5}\right)$.

Pour savoir si les trois droites AB, CD et EF se coupent en un point ou forment un triangle, il faut déterminer si le point I se situe ou non sur la droite EF.

Cela revient à tester si les coordonnées du point I satisfont l'équation de la droite EF :
$2 \cdot \frac{11}{15} - 1 = \frac{7}{15} \neq \frac{2}{5}$
On conclut donc que les trois droites AB, CD et EF forment un triangle.