**6.15** 1) Puisque la parabole recherchée admet comme sommet S(2 ; 5), son équation est de la forme $y = a\,(x-2)^2 + 5$.

La parabole doit en outre passer par le point A(4 ; −1) :
$-1 = a\,(4-2)^2 + 5$.

On en déduit $-1 = 4\,a + 5$, puis $4\,a = -6$ et enfin $a = -\frac{3}{2}$.

Finalement, la parabole recherchée s'écrit $y = -\frac{3}{2}\,(x-2)^2 + 5$.

2) Attendu que la parabole recherchée coupe l'axe O$x$ en $x = -3$ et $x = 1$, elle s'écrit $y = a\,(x+3)\,(x-1)$.
En effet $x = -3$ et $x = 1$ sont les zéros de la fonction quadratique correspondante.

Pour être tangente à la droite $y = 8$, la parabole doit couper cette droite en un unique point d'intersection. Ainsi le système suivant doit posséder une solution unique :

$$\begin{cases} y = a\,(x+3)\,(x-1) \\ y = 8 \end{cases}$$

Résolvons à présent ce système :
$a\,(x+3)\,(x-1) = 8$
$a\,x^2 + 2\,a\,x - 3\,a - 8 = 0$
$\Delta = (2\,a)^2 - 4\,a\,(-3\,a - 8) = 16\,a^2 + 32\,a = 16\,a\,(a+2)$

Pour que l'on obtienne une solution unique, il faut que le discriminant s'annulle. Cette condition est remplie lorsque $a = 0$ ou $a = -2$.

On doit écarter la possibilité où $a = 0$ : dans ce cas, on obtient la fonction constante $y = 0$ dont le graphe n'est pas une parabole, mais une droite horizontale.

La seule possibilité qui demeure donne ainsi la parabole d'équation :
$y = -2\,(x+3)\,(x-1)$.