6.18 Puisque la parabole recherchée a pour sommet S(1 ; 2), elle peut s'écrire sous la forme $y = a\,(x-1)^2 + 2$.

Pour être tangente à la droite $y = x$, la parabole doit posséder un unique point d'intersection avec celle-là.

En d'autres termes, le système suivant doit posséder une unique solution :

$$\begin{cases} y = a\,(x-1)^2 + 2 \\ y = x \end{cases}$$

Résolvons maintenant ce système :

$a\,(x-1)^2 + 2 = x$

$a\,x^2 - 2\,a\,x + a + 2 = x$

$a\,x^2 - (2\,a+1)\,x + (a+2) = 0$

$\Delta = \big(-(2\,a+1)\big)^2 - 4 \cdot a\,(a+2) = 4\,a^2 + 4\,a + 1 - 4\,a^2 - 8\,a = -4\,a + 1$

Pour qu'il y ait une solution unique, il faut que le discriminant s'annulle, c'est-à-dire que $-4\,a + 1 = 0$, d'où résulte $a = \frac{1}{4}$.

On conclut que la parabole recherchée s'écrit $y = \frac{1}{4}\,(x-1)^2 + 2$.