7 Systèmes d'équations

Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss est une méthode directe de résolution de systèmes linéaires qui permet de transformer un système en un autre système équivalent **échelonné**.

Exemple

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -\ 2\,y & -\ 3\,z & = & -1 \\ 2\,x & +\ \ y & +\ \ z & = & 7 \\ x & +\ 3\,y & -\ 2\,z & = & 13 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2 - 2\,\mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -\ 2\,y & -\ 3\,z & = & -1 \\ & 5\,y & +\ 7\,z & = & 9 \\ & 5\,y & +\ \ z & = & 14 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{L}_3 \to \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -\ 2\,y & -\ 3\,z & = & -1 \\ & 5\,y & +\ 7\,z & = & 9 \\ & & -\ 6\,z & = & 5 \end{array}\right.$$

À ce stade, on pourrait calculer z à partir de la 3$^{\mathrm{e}}$ équation et substituer.

Il est cependant nettement préférable de pratiquer un algorithme de remontée qui offre l'avantage de travailler avec des coefficients entiers.

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & -\ 2\,y & -\ 3\,z & = & -1 \\ & 5\,y & +\ 7\,z & = & 9 \\ & & -\ 6\,z & = & 5 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \to 2\,\mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_2 \to 6\,\mathrm{L}_2 + 7\,\mathrm{L}_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2\,x & -\ \ 4\,y & & = & -7 \\ & 30\,y & & = & 83 \\ & & -\ 6\,z & = & 5 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \mathrm{L}_1 \to 15\,\mathrm{L}_1 + 2\,\mathrm{L}_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 30\,x & & & = & 73 \\ & 30\,y & & = & 83 \\ & & -\ 6\,z & = & 5 \end{array}\right.$$

On conclut finalement que $\mathrm{S} = \left\{\left(\frac{73}{30}\,;\frac{89}{30}\,;-\frac{5}{6}\right)\right\}$.

7.1 Résoudre les systèmes par la méthode d'élimination de Gauss.

1) $\left\{\begin{array}{l} 2\,x + 3\,y + 2\,z = 41 \\ 8\,x + 5\,y = 31 \\ 7\,y = 21 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{l} 2\,x - 3\,y + 2\,z = 41 \\ 5\,x + 3\,y = 10 - z \\ 9\,x = 27 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{l} 7\,x - 4\,y - 5\,z = 56 \\ 3\,y - 2\,z = 13 \\ 5\,x - 3\,y = 22 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 25 \\ x - y + z = 5 \\ x + 2\,z = 2\,y - 10 \end{array}\right.$

5) $\begin{cases} x - y - z = 6 \\ x - 2y - 3z = 10 \\ 5x + 6y + z = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3z - 2y - x = 17 \\ 2y + 3z - 2x = 36 \\ 5x + 2y - z = 10 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x - y + z = 29 \\ x + 3y + 30z = 6 \\ x - y + z = 17 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 47 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + 4y - z = -5 \\ x + 5y - 4z = -9 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ x - y + 4z = 15 \\ -x + 7y - 6z = -27 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2x - 3y + 2z - t = 1 \\ -x + 5y - 3z + 2t = -8 \\ 3x + 2y + 4z - 3t = 15 \\ 5x + 9y + z + 4t = -10 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ y + z + t = 6 \\ x + z + t = 7 \\ x + y + t = 8 \end{cases}$

13) $\begin{cases} 2x + y - 3z + t + u = 4 \\ x - 2y - z + 3t - u = 1 \\ 3x - y + 4z - t - 3u = -6 \\ x + y + z + t + u = 15 \\ 5x - 4y + 3z - 2t + u = 3 \end{cases}$

Déterminants

Étant donné quatre nombres rangés en un tableau carré de 2 lignes et 2 colonnes, on appelle **déterminant d'ordre deux** le nombre

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\,b_2 - a_2\,b_1$$

7.2 Calculer les déterminants d'ordre deux :

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ 4) $\begin{vmatrix} -7 & 9 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ 7) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -15 \end{vmatrix}$

Étant donné neuf nombres rangés en un tableau carré de 3 lignes et 3 colonnes, on appelle **déterminant d'ordre trois** le nombre

$$\mathrm{D} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\,b_2\,c_3 + b_1\,c_2\,a_3 + c_1\,a_2\,b_3 - a_3\,b_2\,c_1 - b_3\,c_2\,a_1 - c_3\,a_2\,b_1$$

La **règle de Sarrus** permet de se rappeler facilement cette formule : on récrit les deux premières colonnes à droite du déterminant ; il suffit alors d'ajouter les produits des diagonales descendantes et de soustraire le produit des diagonales montantes.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix} = a_1\, b_2\, c_3 + b_1\, c_2\, a_3 + c_1\, a_2\, b_3 - a_3\, b_2\, c_1 - b_3\, c_2\, a_1 - c_3\, a_2\, b_1$$

7.3 Calculer les déterminants d'ordre trois :

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 6 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 13 & 6 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 9 & 1 & 16 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ 8) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 9 & -7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Méthode de Cramer

7.4 Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} a_1\, x + b_1\, y = c_1 \\ a_2\, x + b_2\, y = c_2 \end{cases}$$

1) En usant de la méthode par addition, éliminer y et montrer que

$$(a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\, x = b_2\, c_1 - b_1\, c_2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

2) De même, éliminer x avec la méthode par addition pour montrer que

$$(a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\, y = a_1\, c_2 - a_2\, c_1 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

On en déduit immédiatement la méthode de résolution de Cramer.

— Si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, alors le système possède une solution unique donnée par

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

— Si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, alors le système est

1) indéterminé si $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0\,;$

2) impossible sinon.

7.5 Résoudre les systèmes en utilisant la méthode de Cramer.

1) $\begin{cases} x + 5\,y = 35 \\ 3\,x + 2\,y = 27 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2\,x - 7\,y = 8 \\ 4\,y - 9\,x = 19 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 8\,x + 3\,y - 3 = 0 \\ 9\,y + 12\,x - 3 = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5\,x + 7\,y = 101 \\ 7\,x - y = 55 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3\,x + 2\,y = 21 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 7\,x + 3\,y = 36 \\ 11\,x - 5\,y = 8 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 10\,x + 4\,y = 3 \\ 20\,y - 5\,x = 4 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 12\,x - 7\,y = -2 \\ 8\,x + 21\,y = 50 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 3\,x + 4\,y - 85 = 0 \\ 7\,x - 6\,y + 1 = 0 \end{cases}$

7.6 Résoudre et discuter les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2\,m\,x - (m+2)\,y = 3\,m \\ 2\,(m-1)\,x - m\,y = 3\,(m-1) \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + m\,(m-1)\,y = 2\,m^2 \\ x - (m^2-1)\,y = m\,(1-m) \end{cases}$

3) $\begin{cases} (m+1)\,x + (m-1)\,y = m \\ m\,x + (m+1)\,y = m-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} (m+1)^2\,x + (m^2-1)\,y = m+1 \\ (m-1)^2\,x + (m^2-1)\,y = (m-1)^2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} (m-3)\,x + m\,y = 5 \\ m\,x + (m-4)\,y = 2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} (m-1)\,x + (m-2)\,y + 5\,m + 10 = 0 \\ (m+5)\,x + (3\,m+9)\,y - 10 = 0 \end{cases}$

La résolution d'un système 2×2 par la méthode de Cramer se généralise au système 3×3 dans le cas non singulier.

Le système

$$\begin{cases} a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z = d_1 \\ a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z = d_2 \\ a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z = d_3 \end{cases}$$

admet pour solutions

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

à condition que $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$

Sinon, le système peut être indéterminé ou impossible, sans que la méthode de Cramer puisse répondre à cette question. Le système doit alors être résolu avec la méthode du pivot de Gauss.

7.7 Résoudre les systèmes en utilisant la méthode de Cramer.

1) $\begin{cases} 3\,x + 2\,y + z = 23 \\ 5\,x + 2\,y + 4\,z = 46 \\ 10\,x + 5\,y + 4\,z = 75 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2\,y - z = 0 \\ 4\,x + 5\,y - z = 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3\,x - 2\,y + z = 2 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2\,y + z = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5\,x + 3\,y + 2\,z = 1 \\ 3\,x - 0{,}5\,z = 2{,}6 \\ 2\,y + z = -4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 1{,}7\,x - 0{,}6\,y = -4{,}08 \\ 2{,}8\,x + 0{,}6\,z = -6{,}72 \\ 2{,}8\,y - 1{,}7\,z = 19{,}04 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2\,x + y + z = 6 \\ 6\,x + 4\,y = 20 \end{cases}$

7.8 Résoudre et discuter les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} m\,x + y + z = m^2 \\ x + m\,y + z = 3\,m - 2 \\ x + y + m\,z = 2 - m \end{cases}$ 2) $\begin{cases} m\,x + y - z = 1 \\ x + m\,y - z = 1 \\ -x + y + m\,z = 1 \end{cases}$

Méthode par substitution

Pour résoudre un système avec des équations de degré supérieur à un, on utilise généralement la méthode par substitution.

Exemple

$\begin{cases} 3\,x - 5\,y = -1 \\ x^2 + y^2 + 2\,x - 6\,y - 7 = 0 \end{cases}$

La première équation implique $y = \frac{3\,x+1}{5}$ que l'on substitue dans la seconde :

$x^2 + \left(\frac{3\,x+1}{5}\right)^2 + 2\,x - 6 \cdot \frac{3\,x+1}{5} - 7 = 0$

$x^2 + \frac{9\,x^2+6\,x+1}{25} + 2\,x - \frac{18\,x+6}{5} - 7 = 0$

$25\,x^2 + 9\,x^2 + 6\,x + 1 + 50\,x - 90\,x - 30 - 175 = 0$

$34\,x^2 - 34\,x - 204 = 34\,(x^2 - x - 6) = 34\,(x-3)\,(x+2) = 0$

$x_1 = 3$ entraîne $y_1 = \frac{3 \cdot 3+1}{5} = 2$ et $x_2 = -2$ implique $y_2 = \frac{3\cdot(-2)+1}{5} = -1$.

On a donc trouvé $\mathrm{S} = \{(3\,;2)\,;(-2\,;-1)\}$

7.9 Résoudre les systèmes d'équations.

1) $\begin{cases} 2\,y^2 + x^2 = 81 \\ 2\,x + y = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2\,y = 4 \\ (x+3)\,(y-1) = -12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 2\,y^2 = 28 \\ x - y = 8 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 3\,y = 3 \\ x\,y = 36 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ x = 3\,y \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + 2\,y^2 = 466 \\ y - x = 11 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x + y = 14 \\ (x+1)\,(y+7) = 72 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x + y = 12 \\ (x+9)\,(y-3) = 72 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 175 \\ x + y = 35 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x\,y = -12 \\ x + y = 1 \end{cases}$

11) $\begin{cases} 2\,x - y = 5 \\ 2\,x^2 - y^2 = 25 \end{cases}$

12) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x\,y = 49 \\ x - y - 14 = 0 \end{cases}$

13) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -33 \\ 2\,x + 2\,y = 6 \end{cases}$

14) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x\,y + x - y = 6 \\ x + 4\,y - 9 = 0 \end{cases}$

7.10 Deux voyageurs partent au même instant du même point et vont l'un vers le sud, l'autre vers l'est. Ils parcourent respectivement 30 km et 40 km par jour. Après combien de jours seront-ils à 250 km l'un de l'autre ?

7.11 On partage 840 noix entre des enfants. Si chacun reçoit 2 noix de moins, sa part est égale au nombre d'enfants. Combien y a-t-il d'enfants ?

7.12 Un petit marchand a acheté des pommes pour un montant total de 7,56 €. Après en avoir jeté 5 qui étaient gâtées, il vend chaque pomme qui lui reste 4 centimes de plus qu'il ne l'avait payée et réalise ainsi un gain global de 58 centimes. Déterminer le nombre de pommes achetées.

Réponses

7.1

1) $S = \{(2\,;3\,;14)\}$ 2) $S = \{(3\,;-5\,;10)\}$ 3) $S = \{(5\,;1\,;-5)\}$

4) $S = \{(20\,;10\,;-5)\}$ 5) $S = \{(3\,;-2\,;-1)\}$ 6) $S = \left\{\left(\frac{28}{15}\,;\frac{313}{60}\,;\frac{293}{30}\right)\right\}$

7) $S = \{(6\,;-10\,;1)\}$ 8) $S = \left\{\left(-\frac{39}{5}\,;11\,;\frac{37}{5}\right)\right\}$

9) $S = \{(1-\alpha\,;\alpha-2\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ 10) $S = \{(13-11\,\alpha\,;\alpha-2\,;3\,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

11) $S = \{(-3\,;1\,;4\,;-2)\}$ 12) $S = \{(4\,;3\,;2\,;1)\}$

13) $S = \{(1\,;2\,;3\,;4\,;5)\}$

7.2

1) 5 2) -1 3) 0 4) 47

5) -1 6) 2 7) -14 8) 0

7.3

1) -70 2) -88 3) 30

4) 12 5) 1 6) -20

7) -6 8) 178 9) -59

7.5

1) $S = \{(5\,;6)\}$ 2) $S = \{(-3\,;-2)\}$ 3) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{1}{3}\right)\right\}$

4) $S = \{(9\,;8)\}$ 5) $S = \{(5\,;3)\}$ 6) $S = \{(3\,;5)\}$

7) $S = \left\{\left(\frac{1}{5}\,;\frac{1}{4}\right)\right\}$ 8) $S = \{(1\,;2)\}$ 9) $S = \{(11\,;13)\}$

7.6

1) Si $m \neq 2$: $S = \left\{\left(\frac{3}{2}\,;0\right)\right\}$; si $m = 2$: $S = \left\{\left(\alpha\,;\frac{2\,\alpha-3}{2}\right) : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

2) Si $m \neq 1$ et $m \neq -\frac{1}{2}$: $S = \left\{\left(\frac{m^2\,(m+3)}{2\,m+1}\,;\frac{m\,(3\,m-1)}{(m-1)\,(2\,m+1)}\right)\right\}$;
si $m = 1$ ou $m = -\frac{1}{2}$: $S = \varnothing$.

3) Si $m \neq -\frac{1}{3}$: $S = \left\{\left(\frac{3\,m-1}{3\,m+1}\,;\frac{-1}{3\,m+1}\right)\right\}$; si $m = -\frac{1}{3}$: $S = \varnothing$.

4) Si $m \neq -1$ et $m \neq 0$ et $m \neq 1$: $S = \left\{\left(\frac{1}{4}\,(3-m)\,;\frac{1}{4}\,(m-1)\right)\right\}$;
si $m = -1$: $S = \{(1\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$; si $m = 0$: $S = \{(\alpha\,;\alpha-1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$;
si $m = 1$: $S = \left\{\left(\frac{1}{2}\,;\alpha\right) : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$.

5) Si $m \neq \frac{12}{7}$: $S = \left\{\left(\frac{3\,m-20}{12-7\,m}\,;\frac{3\,m+6}{7\,m-12}\right)\right\}$; si $m = \frac{12}{7}$: $S = \varnothing$.

6) Si $m \neq -1$ et $m \neq -\frac{1}{2}$: $S = \left\{\left(\frac{-5\,(3\,m+14)}{2\,m+1}\,;\frac{5\,(m+8)}{2\,m+1}\right)\right\}$;
si $m = -1$: $S = \left\{\left(\alpha\,;\frac{1}{3}\,(5-2\,\alpha)\right) : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$; si $m = -\frac{1}{2}$: $S = \varnothing$.

7.7

1) $S = \{(4\,;3\,;5)\}$ 2) $S = \{(-1\,;2\,;3)\}$ 3) $S = \left\{\left(\frac{5}{4}\,;1\,;\frac{1}{4}\right)\right\}$

4) $S = \left\{\left(\frac{6}{5}\,;-3\,;2\right)\right\}$ 5) $S = \{(-1{,}2\,;3{,}4\,;-5{,}6)\}$

6) $S = \{(2-2\,\alpha\,;3\,\alpha+2\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$

7.8 1) Si $m \neq -2$ et $m \neq 1$: $\mathrm{S} = \{(m\,;2\,;-2)\}$;
si $m = -2$: $\mathrm{S} = \{(\alpha\,;\alpha+4\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$;
si $m = 1$: $\mathrm{S} = \{(\alpha\,;\beta\,;1-\alpha-\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

2) Si $m \neq -1$ et $m \neq 0$ et $m \neq 1$: $\mathrm{S} = \left\{\left(\frac{1}{m}\,;\frac{1}{m}\,;\frac{1}{m}\right)\right\}$;
si $m = -1$: $\mathrm{S} = \{(\alpha\,;\alpha\,;-1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$; si $m = 0$: $\mathrm{S} = \varnothing$;
si $m = 1$: $\mathrm{S} = \{(\alpha\,;1\,;\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

7.9

1) $\mathrm{S} = \{(-3\,;6)\,;(3\,;-6)\}$

2) $\mathrm{S} = \left\{(-6\,;5)\,;\left(5\,;-\frac{1}{2}\right)\right\}$

3) $\mathrm{S} = \{(6\,;-2)\,;(26\,;18)\}$

4) $\mathrm{S} = \{(12\,;3)\,;(-9\,;-4)\}$

5) $\mathrm{S} = \{(6\,;2)\,;(-6\,;-2)\}$

6) $\mathrm{S} = \left\{(4\,;15)\,;\left(-\frac{56}{3}\,;-\frac{23}{3}\right)\right\}$

7) $\mathrm{S} = \{(3\,;11)\,;(17\,;-3)\}$

8) $\mathrm{S} = \{(3\,;9)\,;(-3\,;15)\}$

9) $\mathrm{S} = \{(15\,;20)\}$

10) $\mathrm{S} = \{(4\,;-3)\,;(-3\,;4)\}$

11) $\mathrm{S} = \{(5\,;5)\}$

12) $\mathrm{S} = \{(7\,;-7)\}$

13) $\mathrm{S} = \{(-4\,;7)\}$

14) $\mathrm{S} = \left\{(1\,;2)\,;\left(-\frac{51}{13}\,;\frac{42}{13}\right)\right\}$

7.10 5 jours

7.11 28 enfants

7.12 42 pommes à 18 centimes