

7.6

$$1) \begin{cases} 2mx - (m+2)y = 3m \\ 2(m-1)x - my = 3(m-1) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix} = 2m(-m) - 2(m-1)(-(m+2)) = \\ -2m^2 + 2m^2 + 4m - 2m - 4 = 2m - 4 = 2(m-2)$$

(a) Si $m \neq 2$, alors le système admet une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3m & -(m+2) \\ 3(m-1) & -m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix}} = \frac{3m(-m) - 3(m-1)(-(m+2))}{2m(-m) - 2(m-1)(-(m+2))} \\ = \frac{-3m^2 + 3m^2 + 6m - 3m - 6}{-2m^2 + 2m^2 + 4m - 2m - 4} = \frac{3m - 6}{2m - 4} = \frac{3(m-2)}{2(m-2)} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2m & 3m \\ 2(m-1) & 3(m-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix}} = \frac{2m \cdot 3(m-1) - 2(m-1) \cdot 3m}{2m(-m) - 2(m-1)(-(m+2))} \\ = \frac{6m^2 - 6m - 6m^2 + 6m}{-2m^2 + 2m^2 + 4m - 2m - 4} = \frac{0}{2m - 4} = 0$$

$$S = \left\{ \left(\frac{3}{2}; 0 \right) \right\}$$

(b) Si $m = 2$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} 4x - 4y = 6 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

La première équation est vérifiée quelle que soit la valeur de la variable x : par conséquent, la variable x est libre.

En posant $x = \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$), la seconde équation implique $y = \frac{2\alpha-3}{2}$

En résumé, $S = \left\{ \left(\alpha; \frac{2\alpha-3}{2} \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$.

$$2) \begin{cases} x + m(m-1)y = 2m^2 \\ x - (m^2-1)y = m(1-m) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m(m-1) \\ 1 & -(m^2-1) \end{vmatrix} = -(m^2-1) - m(m-1) = \\ -(m-1)(m+1) - m(m-1) = -(m-1)((m+1)+m) = \\ -(m-1)(2m+1)$$

(a) Si $m \neq 1$ et $m \neq -\frac{1}{2}$, alors le système admet une solution unique :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} 2m^2 & m(m-1) \\ m(1-m) & -(m^2-1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m(m-1) \\ 1 & -(m^2-1) \end{vmatrix}} = \frac{-2m^2(m^2-1) - m(1-m)m(m-1)}{-(m^2-1) - m(m-1)} \\ &= \frac{-2m^2(m-1)(m+1) + m^2(m-1)^2}{-(m-1)(m+1) - m(m-1)} = \\ &= \frac{m^2(m-1)(-2(m+1) + (m-1))}{-(m-1)((m+1) + m)} = \frac{m^2(m-1)(-m-3)}{-(m-1)(2m+1)} = \\ &= \frac{m^2(m+3)}{2m+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2m^2 \\ 1 & m(1-m) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m(m-1) \\ 1 & -(m^2-1) \end{vmatrix}} = \frac{m(1-m) - 2m^2}{-(m^2-1) - m(m-1)} \\ &= \frac{m - m^2 - 2m^2}{-(m-1)(m+1) - m(m-1)} = \frac{m - 3m^2}{-(m-1)((m+1) + m)} = \\ &= \frac{m(1-3m)}{-(m-1)(2m+1)} = \frac{m(3m-1)}{(m-1)(2m+1)} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{m^2(m+3)}{2m+1}; \frac{m(3m-1)}{(m-1)(2m+1)} \right) \right\}$$

(b) Si $m = 1$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Ces deux équations étant manifestement contradictoires, on en conclut que ce système est impossible : $S = \emptyset$.

(c) Si $m = -\frac{1}{2}$, alors le système devient :

$$\begin{cases} x + \frac{3}{4}y = \frac{1}{2} \\ x + \frac{3}{4}y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

En soustrayant ces équations, on obtient l'absurdité $0 = \frac{5}{4}$, si bien que $S = \emptyset$.

$$3) \begin{cases} (m+1)x + (m-1)y = m \\ mx + (m+1)y = m-1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m & m+1 \end{vmatrix} = (m+1)^2 - m(m-1) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + m = 3m + 1$$

(a) Si $m \neq -\frac{1}{3}$, alors le système admet une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & m-1 \\ m-1 & m+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m & m+1 \end{vmatrix}} = \frac{m(m+1) - (m-1)^2}{(m+1)^2 - m(m-1)} =$$

$$= \frac{m^2 + m - m^2 + 2m - 1}{m^2 + 2m + 1 - m^2 + m} = \frac{3m - 1}{3m + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m+1 & m \\ m & m-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m & m+1 \end{vmatrix}} = \frac{(m+1)(m-1) - m^2}{(m+1)^2 - m(m-1)} =$$

$$= \frac{m^2 - 1 - m^2}{m^2 + 2m + 1 - m^2 + m} = \frac{-1}{3m + 1}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{3m-1}{3m+1} ; \frac{-1}{3m+1} \right) \right\}$$

(b) Si $m = -\frac{1}{3}$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y = -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 0 = -3 \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

La contradiction de la première équation montre que le système est impossible : $S = \emptyset$.

$$4) \begin{cases} (m+1)^2 x + (m^2-1)y = m+1 \\ (m-1)^2 x + (m^2-1)y = (m-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} (m+1)^2 & m^2-1 \\ (m-1)^2 & m^2-1 \end{vmatrix} = (m+1)^2(m^2-1) - (m-1)^2(m^2-1) =$$

$$(m+1)^3(m-1) - (m-1)^3(m+1) =$$

$$(m+1)(m-1)((m+1)^2 - (m-1)^2) =$$

$$(m+1)(m-1) \underbrace{((m+1) - (m-1))}_2 \underbrace{((m+1) + (m-1))}_{2m} =$$

$$4m(m+1)(m-1)$$

(a) Si $m \neq \pm 1$ et $m \neq 0$, alors le système admet une solution unique :

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\begin{vmatrix} m+1 & m^2-1 \\ (m-1)^2 & m^2-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (m+1)^2 & m^2-1 \\ (m-1)^2 & m^2-1 \end{vmatrix}} = \frac{(m+1)(m^2-1) - (m-1)^2(m^2-1)}{4m(m+1)(m-1)} \\
 &= \frac{(m^2-1)((m+1) - (m-1)^2)}{4m(m+1)(m-1)} \\
 &= \frac{(m+1)(m-1)(m+1 - m^2 + 2m - 1)}{4m(m+1)(m-1)} \\
 &= \frac{(m+1)(m-1)(-m^2 + 3m)}{4m(m+1)(m-1)} \\
 &= \frac{(m+1)(m-1)m(-m+3)}{4m(m+1)(m-1)} = \frac{1}{4}(3-m) \\
 y &= \frac{\begin{vmatrix} (m+1)^2 & m+1 \\ (m-1)^2 & (m-1)^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (m+1)^2 & m^2-1 \\ (m-1)^2 & m^2-1 \end{vmatrix}} = \frac{(m+1)^2(m-1)^2 - (m-1)^2(m+1)}{4m(m+1)(m-1)} \\
 &= \frac{(m+1)(m-1)^2((m+1) - 1)}{4m(m+1)(m-1)} = \frac{(m+1)(m-1)^2m}{4m(m+1)(m-1)} \\
 &= \frac{1}{4}(m-1) \\
 S &= \left\{ \left(\frac{1}{4}(3-m) ; \frac{1}{4}(m-1) \right) \right\}
 \end{aligned}$$

(b) Si $m = -1$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 4x = 4 \end{cases}$$

La seconde équation implique aussitôt $x = 1$.

Attendu qu'il n'y a aucune condition sur y , c'est une variable libre :
 $y = \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$S = \{(1 ; \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(c) Si $m = 0$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Si l'on pose $x = \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$), alors $y = \alpha - 1$.

$$S = \{(\alpha ; \alpha - 1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

(d) Si $m = -1$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} 4x = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La première équation implique immédiatement $x = \frac{1}{2}$.

Attendu qu'il n'y a aucune condition sur y , c'est une variable libre :
 $y = \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$).

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \alpha \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$5) \begin{cases} (m-3)x + my = 5 \\ mx + (m-4)y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} m-3 & m \\ m & m-4 \end{vmatrix} = (m-3)(m-4) - m^2 = -7m + 12$$

(a) Si $m \neq \frac{12}{7}$, alors le système admet une solution unique :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & m \\ 2 & m-4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m-3 & m \\ m & m-4 \end{vmatrix}} = \frac{5(m-4) - 2m}{(m-3)(m-4) - m^2} = \frac{3m-20}{12-7m}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m-3 & 5 \\ m & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m-3 & m \\ m & m-4 \end{vmatrix}} = \frac{2(m-3) - 5m}{(m-3)(m-4) - m^2} = \frac{3m+6}{7m-12}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{3m-20}{12-7m}; \frac{3m+6}{7m-12} \right) \right\}$$

(b) Si $m = \frac{12}{7}$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} -\frac{9}{7}x + \frac{12}{7}y = 5 \\ \frac{12}{7}x - \frac{16}{7}y = 2 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -\frac{9}{7}x + \frac{12}{7}y = 5 \\ 0 = 26 \end{cases}$$

La seconde équation montre l'impossibilité de ce système, d'où $S = \emptyset$.

$$6) \begin{cases} (m-1)x + (m-2)y = -5m-10 \\ (m+5)x + (3m+9)y = 10 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m+5 & 3m+9 \end{vmatrix} = (m-1)(3m+9) - (m+5)(m-2) =$$

$$3m^2 + 9m - 3m - 9 - m^2 + 2m - 5m + 10 = 2m^2 + 3m + 1$$

Réolvons l'équation $2m^2 + 3m + 1 = 0$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \quad m_1 = \frac{-3-1}{2 \cdot 2} = -1 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-3+1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

(a) Si $m \neq -1$ et $m \neq -\frac{1}{2}$, alors le système admet une solution unique :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -5m-10 & m-2 \\ 10 & 3m+9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m+5 & 3m+9 \end{vmatrix}} = \frac{(-5m-10)(3m+9) - 10(m-2)}{(m-1)(3m+9) - (m+5)(m-2)} \\ &= \frac{-15m^2 - 45m - 30m - 90 - 10m + 20}{3m^2 + 9m - 3m - 9 - m^2 + 2m - 5m + 10} \\ &= \frac{-15m^2 - 85m - 70}{2m^2 + 3m + 1} = \frac{-5(3m^2 + 17m + 14)}{2m^2 + 3m + 1} \end{aligned}$$

Réolvons $3m^2 + 17m + 14 = 0$:

$$\Delta = 17^2 - 4 \cdot 3 \cdot 14 = 121 = 11^2$$

$$m_1 = \frac{-17-11}{2 \cdot 3} = -\frac{14}{3} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-17+11}{2 \cdot 3} = -1$$

$$\text{Donc } 3m^2 + 17m + 14 = 3\left(m + \frac{14}{3}\right)(m+1) = (3m+14)(m+1).$$

$$\text{On conclut que } x = \frac{-5(3m+14)(m+1)}{(m+1)(2m+1)} = \frac{-5(3m+14)}{2m+1}.$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} m-1 & -5m-10 \\ m+5 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m+5 & 3m+9 \end{vmatrix}} = \frac{10(m-1) - (m+5)(-5m-10)}{(m-1)(3m+9) - (m+5)(m-2)} \\ &= \frac{10m - 10 + 5m^2 + 10m + 25m + 50}{3m^2 + 9m - 3m - 9 - m^2 + 2m - 5m + 10} \\ &= \frac{5m^2 + 45m + 40}{2m^2 + 3m + 1} = \frac{5(m^2 + 9m + 8)}{2m^2 + 3m + 1} = \frac{5(m+1)(m+8)}{(m+1)(2m+1)} \\ &= \frac{5(m+8)}{2m+1} \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{-5(3m+14)}{2m+1}, \frac{5(m+8)}{2m+1} \right) \right\}$$

(b) Si $m = -1$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} -2x - 3y = -5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x - 3y = -5 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Puisque la seconde équation est toujours vérifiée, l'une des variables doit être libre.

En posant $x = \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$), la première équation donne $y = \frac{5-2\alpha}{3}$.

$$S = \left\{ \left(\alpha; \frac{1}{3}(5-2\alpha) \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) Si $m = -\frac{1}{2}$, alors le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y = -\frac{15}{2} \\ \frac{9}{2}x + \frac{15}{2}y = 10 \end{array} \right| \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y = -\frac{15}{2} \\ 0 = -\frac{25}{2} \end{array} \right.$$

La contradiction de la seconde équation signifie que $S = \emptyset$.