

7.7

$$1) \begin{cases} 3x + 2y + z = 23 \\ 5x + 2y + 4z = 46 \\ 10x + 5y + 4z = 75 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 10 + 1 \cdot 5 \cdot 5 - 10 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \cdot 2 =$$

$$24 + 80 + 25 - 20 - 60 - 40 = 9 \neq 0$$

Le système admet donc une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 23 & 2 & 1 \\ 46 & 2 & 4 \\ 75 & 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 23 & 2 & 1 \\ 46 & 2 & 4 \\ 75 & 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 23 & 2 \\ 46 & 2 \\ 75 & 5 \end{vmatrix}}{9} =$$

$$= \frac{23 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 75 + 1 \cdot 46 \cdot 5 - 75 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot 23 - 4 \cdot 46 \cdot 2}{9}$$

$$= \frac{184 + 600 + 230 - 150 - 460 - 368}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 23 & 1 \\ 5 & 46 & 4 \\ 10 & 75 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 23 & 1 \\ 5 & 46 & 4 \\ 10 & 75 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 23 \\ 5 & 46 \\ 10 & 75 \end{vmatrix}}{9} =$$

$$= \frac{3 \cdot 46 \cdot 4 + 23 \cdot 4 \cdot 10 + 1 \cdot 5 \cdot 75 - 10 \cdot 46 \cdot 1 - 75 \cdot 4 \cdot 3 - 4 \cdot 5 \cdot 23}{9}$$

$$= \frac{552 + 920 + 375 - 460 - 900 - 460}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 23 \\ 5 & 2 & 46 \\ 10 & 5 & 75 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 23 \\ 5 & 2 & 46 \\ 10 & 5 & 75 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \\ 10 & 5 \end{vmatrix}}{9} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 75 + 2 \cdot 46 \cdot 10 + 23 \cdot 5 \cdot 5 - 10 \cdot 2 \cdot 23 - 5 \cdot 46 \cdot 3 - 75 \cdot 5 \cdot 2}{9}$$

$$= \frac{450 + 920 + 575 - 460 - 690 - 750}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

On a ainsi obtenu $S = \{(4; 3; 5)\}$.

$$2) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + 5y - z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-1) =$$

$$-2 + 4 + 5 - 8 + 5 - 1 = 3 \neq 0$$

Le système admet donc une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{3} =$$

$$= \frac{0 \cdot 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 0 \cdot 5 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 0 \cdot (-1)}{3}$$

$$= \frac{0 + 3 + 0 - 6 - 0 - 0}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}{3} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot 0}{3}$$

$$= \frac{0 + 0 + 3 - 0 + 3 - 0}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}}{3} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot (-1)}{3}$$

$$= \frac{6 + 0 + 0 - 0 - 0 + 3}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

On a ainsi obtenu $S = \{(-1; 2; 3)\}$.

$$3) \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ x + y - z = 2 \\ -x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot (-2) =$$

$$3 - 2 + 2 + 1 + 6 + 2 = 12 \neq 0$$

Le système admet donc une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{12} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot (-2)}{12}$$

$$= \frac{2 + 2 + 4 - 1 + 4 + 4}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{12} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2}{12}$$

$$= \frac{6 + 2 + 1 + 2 + 3 - 2}{12} = \frac{12}{12} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{12} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{3 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot (-2)}{12}$$

$$= \frac{3 + 4 + 4 + 2 - 12 + 2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

On a ainsi obtenu $S = \left\{ \left(\frac{5}{4}; 1; \frac{1}{4} \right) \right\}$.

$$4) \begin{cases} 5x + 3y + 2z = 1 \\ 3x - 0,5z = 2,6 \\ 2y + z = -4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -0,5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -0,5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$5 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-0,5) \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-0,5) \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$0 + 0 + 12 - 0 + 5 - 9 = 8 \neq 0$$

Le système admet donc une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2,6 & 0 & -0,5 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -0,5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2,6 & 0 & -0,5 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} =$$

$$= \frac{1 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-0,5) \cdot (-4) + 2 \cdot 2,6 \cdot 2 - (-4) \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot (-0,5) \cdot 1 - 1 \cdot 2,6 \cdot 3}{8}$$

$$= \frac{0 + 6 + 10,4 - 0 + 1 - 7,8}{8} = \frac{9,6}{8} = 1,2 = \frac{6}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2,6 & -0,5 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -0,5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2,6 & -0,5 \\ 0 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{8} =$$

$$= \frac{5 \cdot 2,6 \cdot 1 + 1 \cdot (-0,5) \cdot 0 + 2 \cdot 3 \cdot (-4) - 0 \cdot 2,6 \cdot 2 - (-4) \cdot (-0,5) \cdot 5 - 1 \cdot 3 \cdot 1}{8}$$

$$= \frac{13 + 0 - 24 - 0 - 10 - 3}{8} = \frac{-24}{8} = -3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2,6 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & -0,5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2,6 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}}{8} =$$

$$= \frac{5 \cdot 0 \cdot (-4) + 3 \cdot 2,6 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2,6 \cdot 5 - (-4) \cdot 3 \cdot 3}{8}$$

$$= \frac{0 + 0 + 6 - 0 - 26 + 36}{8} = \frac{16}{8} = 2$$

On a ainsi obtenu $S = \left\{ \left(\frac{6}{5}; -3; 2 \right) \right\}$.

$$5) \begin{cases} 1,7x - 0,6y &= -4,08 \\ 2,8x &+ 0,6z = -6,72 \\ &2,8y - 1,7z = 19,04 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1,7 & -0,6 & 0 \\ 2,8 & 0 & 0,6 \\ 0 & 2,8 & -1,7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,7 & -0,6 & 0 \\ 2,8 & 0 & 0,6 \\ 0 & 2,8 & -1,7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1,7 & -0,6 \\ 2,8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$1,7 \cdot 0 \cdot (-1,7) + (-0,6) \cdot 0,6 \cdot 0 + 0 \cdot 2,8 \cdot 2,8 - 0 \cdot 0 \cdot 0 - 2,8 \cdot 0,6 \cdot 1,7 - (-1,7) \cdot 2,8 \cdot (-0,6) =$$

$$0 + 0 + 0 - 0 - 2,856 - 2,856 = -5,712 \neq 0$$

Le système admet donc une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -4,08 & -0,6 & 0 \\ -6,72 & 0 & 0,6 \\ 19,04 & 2,8 & -1,7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,7 & -0,6 & 0 \\ 2,8 & 0 & 0,6 \\ 0 & 2,8 & -1,7 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -4,08 & -0,6 & 0 \\ -6,72 & 0 & 0,6 \\ 19,04 & 2,8 & -1,7 \end{vmatrix}}{-5,712} = \frac{\begin{vmatrix} -4,08 & -0,6 \\ -6,72 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 19,04 & 2,8 \end{vmatrix}}{-5,712} =$$

$$= \frac{0 - 6,8544 + 0 - 0 + 6,8544 + 6,8544}{-5,712} = \frac{6,8544}{-5,712} = -1,2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1,7 & -4,08 & 0 \\ 2,8 & -6,72 & 0,6 \\ 0 & 19,04 & -1,7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,7 & -0,6 & 0 \\ 2,8 & 0 & 0,6 \\ 0 & 2,8 & -1,7 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1,7 & -4,08 & 0 \\ 2,8 & -6,72 & 0,6 \\ 0 & 19,04 & -1,7 \end{vmatrix}}{-5,712} =$$

$$= \frac{19,4208 + 0 + 0 - 0 - 19,4208 - 19,4208}{-5,712} = \frac{-19,4208}{-5,712} = 3,4$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1,7 & -0,6 & -4,08 \\ 2,8 & 0 & -6,72 \\ 0 & 2,8 & 19,04 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,7 & -0,6 & 0 \\ 2,8 & 0 & 0,6 \\ 0 & 2,8 & -1,7 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1,7 & -0,6 & -4,08 \\ 2,8 & 0 & -6,72 \\ 0 & 2,8 & 19,04 \end{vmatrix}}{-5,712} =$$

$$= \frac{0 + 0 - 31,9872 - 0 + 31,9872 + 31,9872}{-5,712} = \frac{31,9872}{-5,712} = -5,6$$

On a ainsi obtenu $S = \{(-1,2; 3,4; -5,6)\}$.

$$6) \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + y + z = 6 \\ 6x + 4y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 6 + (-1) \cdot 2 \cdot 4 - 6 \cdot 1 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$0 + 6 - 8 + 6 - 4 - 0 = 0$$

Puisque le déterminant est nul, ce système ne peut pas être résolu à l'aide de la méthode de Cramer. Il faut donc recourir à la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + y + z = 6 \\ 6x + 4y = 20 \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -6 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ y - 3z = 2 \\ -2y + 6z = -4 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ y - 3z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 2 \\ y - 3z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La dernière équation $0 = 0$ est vérifiée pour n'importe quelle valeur de la variable z . On dit que la variable z est **libre**.

En posant $z = \alpha$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$), on obtient :

$$\begin{cases} x = 2 - 2\alpha \\ y = 3\alpha + 2 \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$S = \{(2 - 2\alpha; 3\alpha + 2; \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$$