

7.8

$$1) \begin{cases} mx + y + z = m^2 \\ x + my + z = 3m - 2 \\ x + y + mz = 2 - m \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2$$

Réolvons l'équation $m^3 - 3m + 2 = 0$.

On constate que $m = 1$ est une solution évidente : $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$.

Utilisons le schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -3 & 2 & \\ & 1 & 1 & -2 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Donc } m^3 - 3m + 2 = (m - 1) \underbrace{(m^2 + m - 2)}_{(m-1)(m+2)} = (m - 1)^2 (m + 2)$$

(a) Si $m \neq -2$ et $m \neq 1$, alors le système admet une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m^2 & 1 & 1 \\ 3m - 2 & m & 1 \\ 2 - m & 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} m^2 & 1 & 1 \\ 3m - 2 & m & 1 \\ 2 - m & 1 & m \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} =$$

$$= \frac{m^4 + (2 - m) + (3m - 2) - m(2 - m) - m^2 - m(3m - 2)}{m^3 - 3m + 2}$$

$$= \frac{m^4 + 2 - m + 3m - 2 - 2m + m^2 - m^2 - 3m^2 + 2m}{m^3 - 3m + 2}$$

$$= \frac{m^4 - 3m^2 + 2m}{m^3 - 3m + 2} = \frac{m(m^3 - 3m + 2)}{m^3 - 3m + 2} = m$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m^2 & 1 \\ 1 & 3m - 2 & 1 \\ 1 & 2 - m & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} m & m^2 & 1 \\ 1 & 3m - 2 & 1 \\ 1 & 2 - m & m \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} =$$

$$= \frac{m^2(3m - 2) + m^2 + (2 - m) - (3m - 2) - m(2 - m) - m^3}{m^3 - 3m + 2}$$

$$= \frac{3m^3 - 2m^2 + m^2 + 2 - m - 3m + 2 - 2m + m^2 - m^3}{m^3 - 3m + 2}$$

$$= \frac{2m^3 - 6m + 4}{m^3 - 3m + 2} = \frac{2(m^3 - 3m + 2)}{m^3 - 3m + 2} = 2$$

$$\begin{aligned}
z &= \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & m^2 \\ 1 & m & 3m-2 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & m^2 \\ 1 & m & 3m-2 \\ 1 & 1 & 2-m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{m^3 - 3m + 2} = \\
&= \frac{m^2(2-m) + (3m-2) + m^2 - m^3 - m(3m-2) - (2-m)}{m^3 - 3m + 2} \\
&= \frac{2m^2 - m^3 + 3m - 2 + m^2 - m^3 - 3m^2 + 2m - 2 + m}{m^3 - 3m + 2} \\
&= \frac{-2m^3 + 6m - 4}{m^3 - 3m + 2} = \frac{-2(m^3 - 3m + 2)}{m^3 - 3m + 2} = -2
\end{aligned}$$

On obtient donc $S = \{(m; 2; -2)\}$.

(b) Si $m = -2$, alors le système s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ x - 2y + z = -8 \\ x + y - 2z = 4 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\
&\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ -3y + 3z = -12 \\ 3y - 3z = 12 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{array} \right| \\
&\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ y - z = 4 \\ y - z = 4 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right| \\
&\begin{cases} -2x + y + z = 4 \\ y - z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right| \\
&\begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ y - z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \end{array} \right| \\
&\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

On constate que z est une variable libre. En posant $z = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + 4 \\ z = \alpha \end{cases}$$

c'est-à-dire $S = \{(\alpha; \alpha + 4; \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(c) Si $m = 1$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ -1 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On constate ici qu'il n'y a qu'une seule contrainte donnée par la première équation, de sorte qu'il y a deux variables libres, par exemple x et y . En posant $x = \alpha$ et $y = \beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 1 - \alpha - \beta \end{cases}$$

à savoir $S = \{(\alpha; \beta; 1 - \alpha - \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

$$2) \begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \\ -x + y + mz = 1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} \begin{array}{c} m & 1 \\ 1 & m \\ -1 & 1 \end{array} = m^3 + 1 - 1 - m + m - m =$$

$$m^3 - m = m(m^2 - 1) = m(m - 1)(m + 1)$$

(a) Si $m \neq -1$ et $m \neq 0$ et $m \neq 1$, alors le système admet une solution unique.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \begin{array}{c} 1 & 1 \\ 1 & m \\ 1 & 1 \end{array}}{m^3 - m}$$

$$= \frac{m^2 - 1 - 1 + m + 1 - m}{m^3 - m} = \frac{m^2 - 1}{m^3 - m} = \frac{(m - 1)(m + 1)}{m(m - 1)(m + 1)} = \frac{1}{m}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} \begin{array}{c} m & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}}{m^3 - m}$$

$$= \frac{m^2 + 1 - 1 - 1 + m - m}{m^3 - m} = \frac{m^2 - 1}{m^3 - m} = \frac{(m-1)(m+1)}{m(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{m^3 - m}$$

$$= \frac{m^2 - 1 + 1 + m - m - 1}{m^3 - m} = \frac{m^2 - 1}{m^3 - m} = \frac{(m-1)(m+1)}{m(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m}$$

On a ainsi trouvé $S = \left\{ \left(\frac{1}{m}; \frac{1}{m}; \frac{1}{m} \right) \right\}$.

(b) Si $m = -1$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ -x + y - z = 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1 \end{array}$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ -2z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} -x + y - z = 1 \\ z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On remarque que y est une variable libre. En posant $y = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, on obtient :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 \end{cases}$$

c'est-à-dire $S = \{(\alpha; \alpha; -1) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(c) Si $m = 0$, alors le système s'écrit :

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right|$$

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ x - z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

La première équation et la troisième équation conduisent à la contradiction $1 = 2$. Par conséquent, le système est impossible : $S = \emptyset$.

(d) Si $m = 0$, alors le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} -1 \\ 1 \\ \end{array} \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 0 = 0 \\ 2y = 2 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 0 = 0 \\ y = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ \\ -1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x - z = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 1 \end{array} \right.$$

Il apparaît que z est une variable libre. En posant $z = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 1 \\ z = \alpha \end{array} \right.$$

à savoir $S = \{(\alpha; 1; \alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.