7.9 1) $\begin{cases} 2\,y^2 + x^2 = 81 \\ 2\,x + y = 0 \end{cases}$

La seconde équation implique $y = -2\,x$ que l'on substitue dans la première équation :

$2\,(-2\,x)^2 + x^2 = 81$
$8\,x^2 + x^2 = 81$
$9\,x^2 - 81 = 0$
$9\,(x^2 - 9) = 0$
$9\,(x+3)\,(x-3) = 0$

(a) $x_1 = -3$ implique $y_1 = -2\,x_1 = -2 \cdot (-3) = 6$
(b) $x_2 = 3$ donne $y_2 = 2\,x_2 = -2 \cdot 3 = -6$

On conclut que $\mathrm{S} = \{(-3\,;6)\,;(3\,;-6)\}$.

2) $\begin{cases} x + 2\,y = 4 \\ (x+3)\,(y-1) = -12 \end{cases}$

La première équation signifie que $x = 4 - 2\,y$ que l'on remplace dans la seconde équation :

$\big((4-2\,y)+3\big)\,(y-1) = -12$
$(7-2\,y)\,(y-1) + 12 = 0$
$7\,y - 7 - 2\,y^2 + 2\,y + 12 = 0$
$-2\,y^2 + 9\,y + 5 = 0$
$\Delta = 9^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 121 = 11^2$

(a) $y_1 = \frac{-9-11}{2\cdot(-2)} = 5$ implique $x_1 = 4 - 2 \cdot 5 = -6$
(b) $y_2 = \frac{-9+11}{2\cdot(-2)} = -\frac{1}{2}$ entraîne $x_2 = 4 - 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 5$

On a donc obtenu $\mathrm{S} = \big\{(-6\,;5)\,;\big(5\,;-\frac{1}{2}\big)\big\}$.

3) $\begin{cases} x^2 - 2\,y^2 = 28 \\ x - y = 8 \end{cases}$

La seconde équation implique $y = x - 8$ que l'on substitue dans la première équation :

$x^2 - 2\,(x-8)^2 = 28$
$x^2 - 2\,x^2 + 32\,x - 128 - 28 = 0$
$-x^2 + 32\,x - 156 = 0$
$\Delta = 32^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-156) = 400 = 20^2$

(a) $x_1 = \frac{-32+20}{2\cdot(-1)} = 6$ donne $y_1 = 6 - 8 = -2$
(b) $x_2 = \frac{-32-20}{2\cdot(-1)} = 26$ entraîne $y_2 = 26 - 8 = 18$.

On conclut que $\mathrm{S} = \{(6\,;-2)\,;(26\,;18)\}$.

4) $\begin{cases} x - 3\,y = 3 \\ x\,y = 36 \end{cases}$

La première équation délivre $x = 3\,y + 3$ que l'on remplace dans la seconde équation :

$(3\,y + 3)\,y = 36$
$3\,y^2 + 3\,y - 36 = 0$
$3\,(y^2 + y - 12) = 0$
$3\,(y - 3)\,(y + 4) = 0$

(a) $y_1 = 3$ implique $x_1 = 3\,y_1 + 3 = 3 \cdot 3 + 3 = 12$
(b) $y_2 = -4$ entraîne $x_2 = 3\,y_2 + 3 = 3 \cdot (-4) + 3 = -9$

On a ainsi obtenu $\mathrm{S} = \big\{(12\,;3)\,;(-9\,;-4)\big\}$.

5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 40 \\ x = 3\,y \end{cases}$

On peut immédiatement effectuer la substitution $x = 3\,y$:

$(3\,y)^2 + y^2 = 40$
$9\,y^2 + y^2 - 40 = 0$
$10\,y^2 - 40 = 0$
$10\,(y^2 - 4) = 0$
$10\,(y - 2)\,(y + 2) = 0$

(a) $y_1 = 2$ donne $x_1 = 3\,y_1 = 3 \cdot 2 = 6$
(b) $y_2 = -2$ délivre $x_2 = 3\,y_2 = 3 \cdot (-2) = -6$

Par conséquent $\mathrm{S} = \big\{(6\,;2)\,;(-6\,;-2)\big\}$.

6) $\begin{cases} x^2 + 2\,y^2 = 466 \\ y - x = 11 \end{cases}$

On déduit de la seconde équation que $y = x + 11$ que l'on substitue dans la première équation :

$x^2 + 2\,(x + 11)^2 = 466$
$x^2 + 2\,x^2 + 44\,x + 142 - 466 = 0$
$3\,x^2 + 44\,x - 224 = 0$
$\Delta = 44^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-224) = 4624 = 68^2$

(a) $x_1 = \frac{-44+68}{2\cdot 3} = 4$ implique $y_1 = x_1 + 11 = 4 + 11 = 15$
(b) $x_2 = \frac{-44-68}{2\cdot 3} = -\frac{56}{3}$ entraîne $y_2 = x_2 + 11 = -\frac{56}{3} + 11 = -\frac{23}{3}$

Il en résulte que $\mathrm{S} = \Big\{(4\,;15)\,;\big(-\frac{56}{3}\,;-\frac{23}{3}\big)\Big\}$.

7) $\begin{cases} x + y = 14 \\ (x+1)\,(y+7) = 72 \end{cases}$

La première équation délivre $y = 14 - x$ que l'on remplace dans la seconde équation :

$(x+1)\,\big((14-x)+7\big) = 72$
$(x+1)\,(21-x) - 72 = 0$
$21\,x - x^2 + 21 - x - 72 = 0$
$-x^2 + 20\,x - 51$
$\Delta = 20^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-51) = 196 = 14^2$

(a) $x_1 = \frac{-20+14}{2\cdot(-1)} = 3$ donne $y_1 = 14 - x_1 = 14 - 3 = 11$
(b) $x_2 = \frac{-20-14}{2\cdot(-1)} = 17$ implique $y_2 = 14 - x_2 = 14 - 17 = -3$

On conclut que $\mathrm{S} = \big\{(3\,;11)\,;(17\,;-3)\big\}$.

8) $\begin{cases} x + y = 12 \\ (x+9)\,(y-3) = 72 \end{cases}$

La première équation entraîne $y = 12 - x$ que l'on substitue dans la seconde équation :

$(x+9)\,\big((12-x)-3\big) = 72$
$(x+9)\,(9-x) - 72 = 0$
$9\,x - x^2 + 81 - 9\,x - 72 = 0$
$9 - x^2 = 0$
$(3-x)\,(3+x) = 0$

(a) $x_1 = 3$ implique $y_1 = 12 - x_1 = 12 - 3 = 9$
(b) $x_2 = -3$ fournit $y_2 = 12 - x_2 = 12 - (-3) = 15$

Finalement $\mathrm{S} = \big\{(3\,;9)\,;(-3\,;15)\big\}$.

9) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 175 \\ x + y = 35 \end{cases}$

De la seconde équation suit que $y = 35 - x$ que l'on remplace dans la première équation :

$(35-x)^2 - x^2 = 175$
$1225 - 70\,x + x^2 - x^2 - 175 = 0$
$-70\,x + 1050 = 0$
$x = 15$
$y = 35 - x = 35 - 15 = 20$
On conclut que $\mathrm{S} = \big\{(15\,;20)\big\}$.

10) $\begin{cases} x\,y = -12 \\ x + y = 1 \end{cases}$

La seconde équation entraîne $y = 1 - x$ que l'on substitue dans la première équation :

$x\,(1 - x) = -12$
$x - x^2 + 12 = 0$
$x^2 - x - 12 = 0$
$(x - 4)\,(x + 3) = 0$

(a) $x_1 = 4$ délivre $y_1 = 1 - x_1 = 1 - 4 = -3$
(b) $x_2 = -3$ implique $y_2 = 1 - x_2 = 1 - (-3) = 4$

Il en résulte que $\mathrm{S} = \{(4\,;-3)\,;(-3\,;4)\}$.

11) $\begin{cases} 2\,x - y = 5 \\ 2\,x^2 - y^2 = 25 \end{cases}$

La première équation donne $y = 2\,x - 5$ que l'on remplace dans la seconde équation :

$2\,x^2 - (2\,x - 5)^2 = 25$
$2\,x^2 - 4\,x^2 + 20\,x - 25 - 25 = 0$
$-2\,x^2 + 20\,x - 50 = 0$
$-2\,(x^2 - 10\,x + 25) = 0$
$-2\,(x - 5)^2 = 0$
$x = 5$
Par suite $y = 2\,x - 5 = 2 \cdot 5 - 5 = 5$
En définitive $\mathrm{S} = \{(5\,;5)\}$.

12) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x\,y = 49 \\ x - y - 14 = 0 \end{cases}$

On tire de la seconde équation que $y = x - 14$ que l'on substitue dans la première équation :

$x^2 + (x - 14)^2 + x\,(x - 14) = 49$
$x^2 + x^2 - 28\,x + 196 + x^2 - 14\,x - 49 = 0$
$3\,x^2 - 42\,x + 147 = 0$
$3\,(x^2 - 14\,x + 49) = 0$
$3\,(x - 7)^2 = 0$
$x = 7$
$y = x - 14 = 7 - 14 = -7$
On conclut que $\mathrm{S} = \{(7\,;-7)\}$.

13) $\begin{cases} x^2 - y^2 = -33 \\ 2\,x + 2\,y = 6 \end{cases}$

La seconde équation équivaut à $x + y = 3$, d'où l'on tire $y = 3 - x$ que l'on remplace dans la première équation :

$x^2 - (3 - x)^2 = -33$
$x^2 - 9 + 6\,x - x^2 + 33 = 0$
$6\,x + 24 = 0$
$x = -4$
Par suite $y = 3 - x = 3 - (-4) = 7$
En conclusion $\text{S} = \{(-4\,;7)\}$.

14) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x\,y + x - y = 6 \\ x + 4\,y - 9 = 0 \end{cases}$

La seconde équation donne $x = 9 - 4\,y$ que l'on substitue dans la première équation :

$(9 - 4\,y)^2 + y^2 + (9 - 4\,y)\,y + (9 - 4\,y) - y = 6$
$81 - 72\,y + 16\,y^2 + y^2 + 9\,y - 4\,y^2 + 9 - 4\,y - y - 6 = 0$
$13\,y^2 - 68\,y + 84 = 0$
$\Delta = (-68)^2 - 4 \cdot 13 \cdot 84 = 256 = 16^2$

(a) $y_1 = \frac{-(-68)-16}{2\cdot 13} = 2$ implique $x_1 = 9 - 4\,y_1 = 9 - 4 \cdot 2 = 1$

(b) $y_2 = \frac{-(-68)+16}{2\cdot 13} = \frac{42}{13}$ donne $x_2 = 9 - 4\,y_2 = 9 - 4 \cdot \frac{42}{13} = -\frac{51}{13}$

Enfin $\text{S} = \big\{(1\,;2)\,;\big(-\frac{51}{13}\,;\frac{42}{13}\big)\big\}$.