8 Vecteurs

Pour caractériser certaines grandeurs, il suffit d'un nombre et d'une unité : un arbre de 8 m de haut, deux villes distantes de 60 km, un sac de 36 kg, de l'eau à 28°. Les grandeurs caractérisées par un nombre sont dites **scalaires**.

D'autres grandeurs ne sont pas complètement caractérisées par un nombre. Par exemple, un déplacement de 30 m n'est pas complètement décrit tant qu'on n'indique pas sa direction et son sens : il faut préciser, par exemple, 30 m vers l'ouest. Une grandeur **vectorielle** est caractérisée par un nombre, une direction et un sens. Les translations, les forces, la vitesse et l'accélération sont des grandeurs vectorielles.

Un **vecteur** non nul est la donnée :
– d'une direction ;
– d'un sens ;
– d'une longueur que l'on appelle la **norme** .

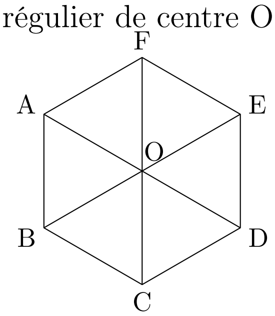
Un vecteur est l'ensemble de toutes les flèches *équivalentes* qui définissent la même translation. Chaque flèche est un **représentant** du vecteur.

Sans référence à un représentant, un vecteur se note par une lettre minuscule surmontée d'une flèche : $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}, \ldots$ L'origine et l'extrémité d'une flèche représentant un vecteur sont aussi utilisées pour le désigner : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{PQ}, \ldots$

On note $\|\vec{v}\|$ la norme d'un vecteur $\vec{v}$.

Exemple

Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O :



$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CD}$ sont des représentants du même vecteur.

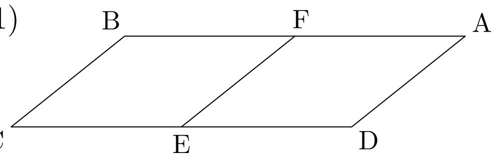
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{DE}$ sont des représentants d'un autre vecteur.

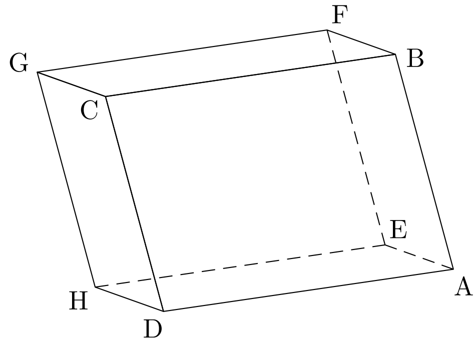
$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ ne représentent pas le même vecteur, car ils sont de sens contraires.

$\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne représentent pas le même vecteur, vu qu'ils n'ont pas la même norme.

Dans le cas particulier où l'origine et l'extrémité de la flèche représentant un vecteur sont confondues, il n'y a pas de déplacement et la translation correspondante est l'*identité*. Par extension, on définit le **vecteur nul** comme le vecteur de norme nulle dont la direction et le sens ne sont pas définis. On le note $\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{PP} = \ldots$

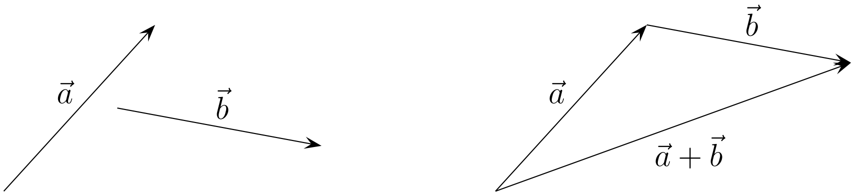
8.1 Énumérer tous les vecteurs qui admettent plusieurs représentants extraits des figures ci-dessous.

1) 

2) 

Addition des vecteurs

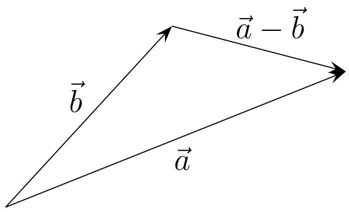
La **somme** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur correspondant à la composition des deux translations $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On le note $\vec{a}+\vec{b}$.



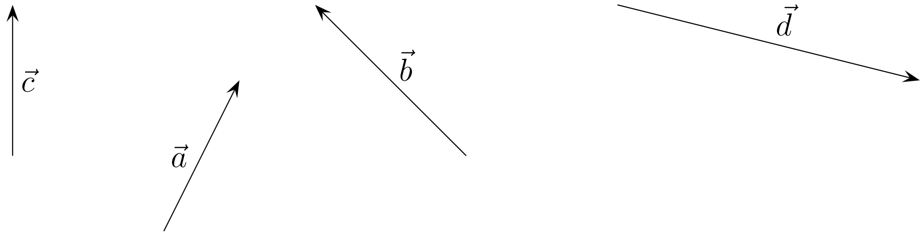
On choisit des représentants des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ tels que l'origine du représentant de $\vec{b}$ coïncide avec l'extrémité du représentant de $\vec{a}$. Le vecteur allant de l'origine de $\vec{a}$ à l'extrémité de $\vec{b}$ est la somme $\vec{a}+\vec{b}$.

On définit la **soustraction vectorielle** comme l'addition du vecteur opposé :

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)=-\vec{b}+\vec{a}$$

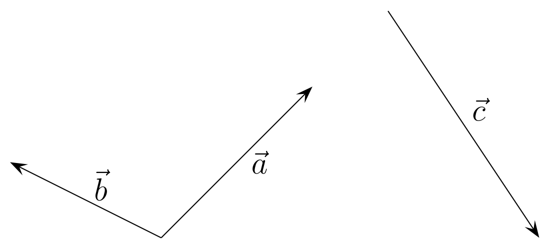


8.2 Dessiner le vecteur $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}$.



8.3 Représenter le vecteur

1) $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ 2) $\vec{y} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 3) $\vec{z} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ 4) $\vec{t} = 2\,\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

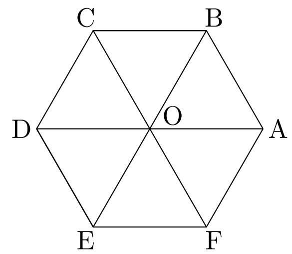


8.4 Soit ABCDEF un hexagone régulier de centre O. Exprimer les vecteurs qui suivent comme un vecteur unique dont chacune des extrémités est l'un des points O, A, B, C, D, E et F.

1) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ 2) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$

3) $\vec{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$ 4) $\vec{d} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}$

5) $\vec{e} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$ 6) $\vec{f} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EE}$



8.5 Soit ABCDEFGH un parallélépipède. Simplifier les vecteurs :

1) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

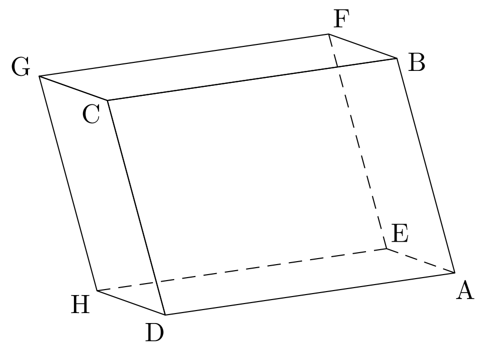
2) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BA}$

3) $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

4) $\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

5) $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

6) $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$

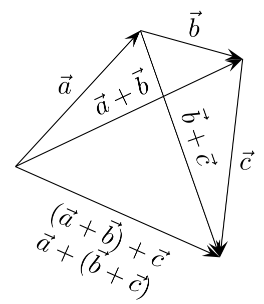


Propriétés de l'addition des vecteurs

1) L'addition des vecteurs est **associative** :

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

quels que soient les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.



2) Le vecteur nul est un **élément neutre** pour l'addition :

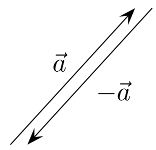
$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$$

pour n'importe quel vecteur $\vec{a}$

3) À tout vecteur $\vec{a}$ est associé son **vecteur opposé**, noté $-\vec{a}$, de même direction, de sens contraire et de même norme que $\vec{a}$:

$$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$$

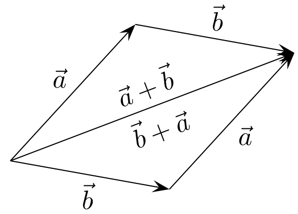
pour tout vecteur $\vec{a}$



4) L'addition des vecteurs est **commutative** :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

quels que soient les vecteurs a et b

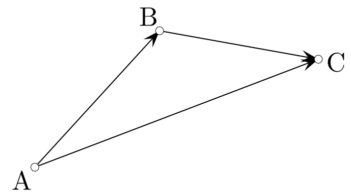


En résumé, ces quatre propriétés signifient que l'ensemble des vecteurs, muni de l'addition vectorielle, forme un **groupe commutatif**.

Relation de Chasles

Soient A, B, C des points quelconques.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



Exemples

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$
2) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EC}$

8.6 Soient A, B, C, D et E des points quelconques. Simplifier au maximum :

1) $\vec{a} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$
2) $\vec{b} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$
3) $\vec{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$
4) $\vec{d} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$
5) $\vec{e} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$
6) $\vec{f} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{AD}$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

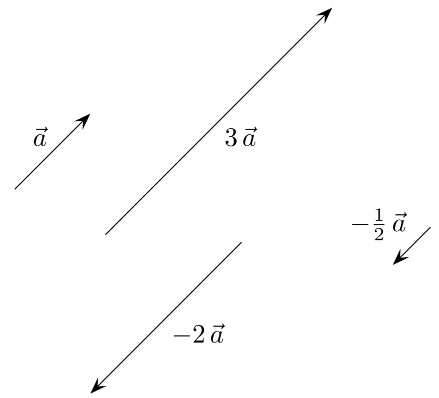
Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\vec{a}$ un vecteur. Le **produit du vecteur $\vec{a}$ par le scalaire k**, noté $k\,\vec{a}$, est le vecteur caractérisé par :
– la direction du vecteur $\vec{a}$;
– le sens du vecteur $\vec{a}$ si $k > 0$ et le sens contraire si $k < 0$;
– une norme égale au produit de celle du vecteur $\vec{a}$ par la valeur absolue de k :

$$\|k\,\vec{a}\| = |k|\,\|\vec{a}\|$$

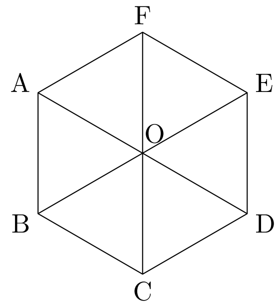
Les vecteurs $\vec{a}$ et $k\,\vec{a}$ sont **colinéaires**, c'est-à-dire qu'ils ont la même direction. Inversement, deux vecteurs non nuls colinéaires sont multiples l'un de l'autre.

Exemples

1)



2)



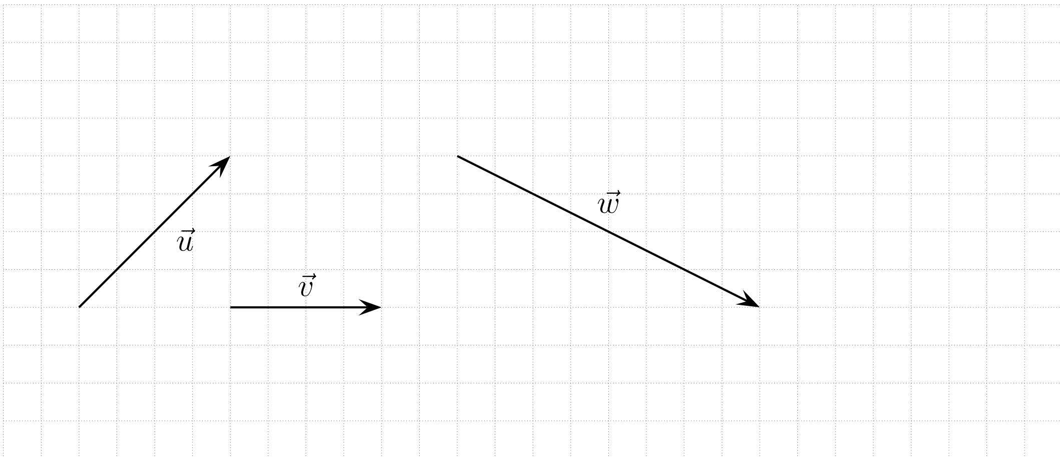
$\overrightarrow{\mathrm{FC}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{DE}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}} = 3\,\overrightarrow{\mathrm{OE}}$

8.7 On donne (voir figure ci-dessous) les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Représenter les vecteurs :

1) $\vec{a} = 2\,\vec{u} + 3\,\vec{v}$ 2) $\vec{b} = 2\,\vec{v} - 3\,\vec{u}$ 3) $\vec{c} = \vec{u} - \left(\vec{w} - \frac{1}{2}\,\vec{v}\right)$

4) $\vec{d} = \vec{u} - 4\,\vec{v} + \vec{w}$ 5) $\vec{e} = 2\,\vec{v} - \left(\vec{u} - \frac{1}{2}\,\vec{w}\right)$



8.8 Soit ABCD un carré de 3 cm de côté. Dessiner les points E, F, G et H tels que :

1) $\overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}} + \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ 2) $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{BA}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}}$

3) $\overrightarrow{\mathrm{DG}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{DC}} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ 4) $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

8.9 On donne deux points A et B distants de 3 cm (placer le point A à 8 cm du bord droite de votre feuille). Représenter sur un même dessin les points R, S, T et U définis par :

$\overrightarrow{\mathrm{AT}} = \frac{4}{5}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $\overrightarrow{\mathrm{AU}} = -\frac{5}{4}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $\overrightarrow{\mathrm{RA}} = 3\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ $\overrightarrow{\mathrm{SA}} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

8.10 On donne deux points A et B distants de 3 cm (placer le point A au bord gauche de votre feuille). Représenter sur un même dessin les points V, W, X et Y définis par :

$\overrightarrow{\mathrm{VA}} = 3\,\overrightarrow{\mathrm{VB}}$ $\quad\overrightarrow{\mathrm{WA}} = -2\,\overrightarrow{\mathrm{WB}}$ $\quad\overrightarrow{\mathrm{AX}} = \frac{4}{5}\,\overrightarrow{\mathrm{XB}}$ $\quad\overrightarrow{\mathrm{AY}} = -\frac{5}{4}\,\overrightarrow{\mathrm{YB}}$

Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un scalaire

Soient $\vec{a}, \vec{b}$ des vecteurs et k, m des scalaires.

1) $k\,(\vec{a} + \vec{b}) = k\,\vec{a} + k\,\vec{b}$
2) $(k+m)\,\vec{a} = k\,\vec{a} + m\,\vec{a}$
3) $k\,(m\,\vec{a}) = (k\,m)\,\vec{a}$
4) $1\,\vec{a} = \vec{a}$
5) $(-1)\,\vec{a} = -\vec{a}$
6) $k\,(-\vec{a}) = (-k)\,\vec{a} = -(k\,\vec{a})$
7) $0\,\vec{a} = \vec{0}$
8) $k\,\vec{0} = \vec{0}$

En résumé, l'ensemble des vecteurs, muni de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un scalaire, forme un **espace vectoriel**.

8.11 Réduire l'expression : $\vec{z} = 3\,(\vec{u} - \vec{v} + 2\,\vec{w}) - \frac{1}{2}\,(\vec{w} - \vec{u}) + 3\,(2\,\vec{v} + \frac{5}{2}\,\vec{w})$.

Combinaison linéaire

Un vecteur $\vec{v}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ s'il existe des scalaires $v_1, v_2, \dots, v_n$ tels que :

$$\vec{v} = v_1\,\vec{e_1} + v_2\,\vec{e_2} + \ldots + v_n\,\vec{e_n}$$

Des vecteurs sont **linéairement dépendants** si l'un d'eux est une combinaison linéaire des autres.

Dans le cas contraire, ils sont **linéairement indépendants**.

Remarque : deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires.

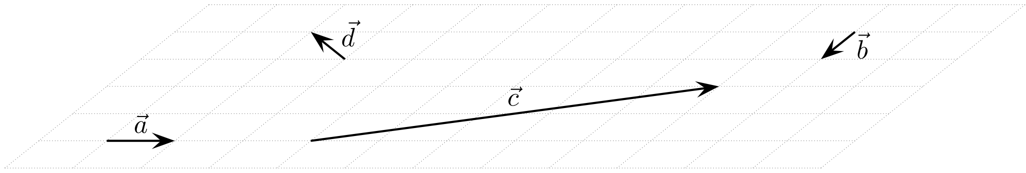
8.12 On considère les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$:

$\vec{a} = 2\,\vec{e_1} - \vec{e_2} + 5\,\vec{e_3}$ $\quad\vec{b} = \vec{e_1} - \vec{e_3}$ $\quad\vec{c} = \vec{e_1} + \vec{e_2} - 3\,\vec{e_3}$

Exprimer comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$:

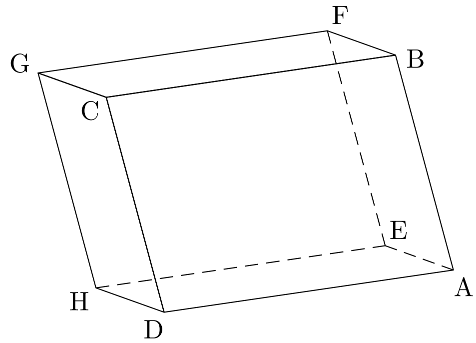
1) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ 2) $3\,\vec{a} + 3\,\vec{b}$ 3) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ 4) $3\,\vec{a} + 2\,\vec{c}$

8.13 Exprimer les vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Construire le vecteur $\vec{x} = -\frac{1}{2}\,\vec{c} - 5\,\vec{d}$ et l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



8.14 Dans le parallélépipède ABCDEFGH, on pose : $\vec{e_1} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}$.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BG}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$.



8.15 On considère une pyramide de sommet S dont la base ABCD est un parallélogramme. On pose : $\vec{e_1} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\vec{e_3} = \overrightarrow{\mathrm{AS}}$.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{BS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ comme combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$.

8.16 Démontrer : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A'B'}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AA'}} = \overrightarrow{\mathrm{BB'}}$

8.17 Les points A, B et C sont tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 2\,\overrightarrow{\mathrm{CA}} + 3\,\overrightarrow{\mathrm{CB}}$. Déterminer le scalaire k qui vérifie l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

8.18 Soient A, B et O trois points quelconques. Démontrer : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$.

8.19 Soient A et B deux points distincts, M le milieu du segment AB et O un point quelconque. Démontrer : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$.

8.20 On donne un quadrilatère convexe ABCD. Soient P, Q, R et S les milieux respectifs des côtés AB, BC, CD et AD. Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

Indication : utiliser les résultats des deux exercices précédents.

Réponses

8.1 1) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{FD}$ $\qquad$ $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DF}$

2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FH}$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CH}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED}$

On peut récrire ces égalités avec les vecteurs opposés.

8.4 1) $\vec{a} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$ $\qquad$ 2) $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{FD}$

3) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{ED}$ $\qquad$ 4) $\vec{d} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{DB}$

5) $\vec{e} = \overrightarrow{AD}$ $\qquad$ 6) $\vec{f} = \overrightarrow{FC}$

8.5 1) $\vec{a} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$ $\qquad$ 2) $\vec{b} = \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

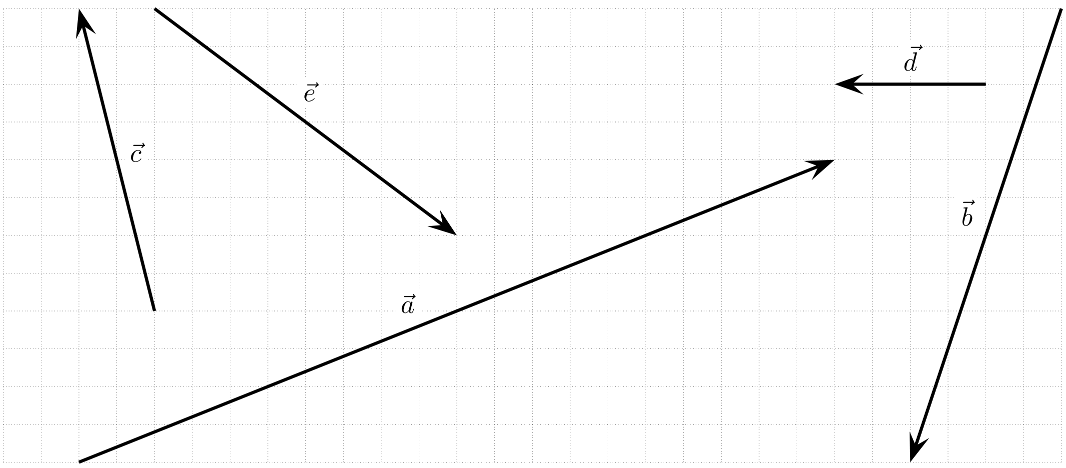
3) $\vec{c} = \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{GB}$ $\qquad$ 4) $\vec{d} = \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{HD}$

5) $\vec{e} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$ $\qquad$ 6) $\vec{f} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

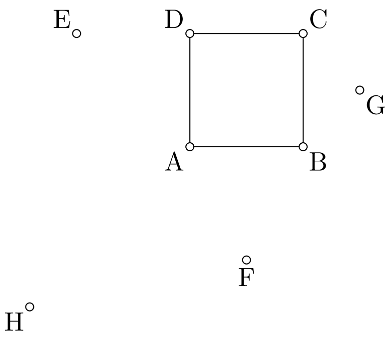
8.6 1) $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ $\qquad$ 2) $\vec{b} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$ $\qquad$ 3) $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$

4) $\vec{d} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}$ $\qquad$ 5) $\vec{e} = \vec{0}$ $\qquad$ 6) $\vec{f} = \overrightarrow{DE}$

8.7



8.8



8.9

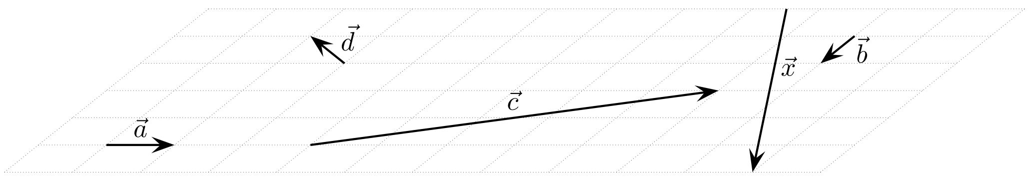
8.10

8.11 $\vec{z} = \frac{7}{2}\,\vec{u} + 3\,\vec{v} + 13\,\vec{w}$

8.12

1) $2\,\vec{e_1} - 2\,\vec{e_2} + 7\,\vec{e_3}$
2) $9\,\vec{e_1} - 3\,\vec{e_2} + 12\,\vec{e_3}$
3) $-2\,\vec{e_2} + 9\,\vec{e_3}$
4) $8\,\vec{e_1} - \vec{e_2} + 9\,\vec{e_3}$

8.13



$\vec{c} = 5\,\vec{a} - 2\,\vec{b}$ $\quad\quad$ $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b}$ $\quad\quad$ $\vec{x} = \frac{5}{2}\,\vec{a} + 6\,\vec{b}$

8.14

$\overrightarrow{AF} = \vec{e_1} + \vec{e_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{AG} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$

$\overrightarrow{BD} = -\vec{e_1} + \vec{e_2}$ $\quad$ $\overrightarrow{BG} = \vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{BE} = -\vec{e_1} + \vec{e_3}$

$\overrightarrow{BH} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{CA} = -\vec{e_1} - \vec{e_2}$ $\quad$ $\overrightarrow{CH} = -\vec{e_1} + \vec{e_3}$

$\overrightarrow{CG} = \vec{e_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{CE} = -\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$

8.15

$\overrightarrow{BS} = -\vec{e_1} + \vec{e_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{DS} = -\vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{DB} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$

$\overrightarrow{CA} = -\vec{e_1} - \vec{e_2}$ $\quad$ $\overrightarrow{CS} = -\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$ $\quad$ $\overrightarrow{AS} = \vec{e_3}$

$\overrightarrow{DC} = \vec{e_1}$ $\quad$ $\overrightarrow{AC} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$

8.17 $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}\,\overrightarrow{AB}$

8.21 On donne trois points non alignés O, A et B.

1) Construire les points C, D et E tels que :

$$\overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OA} \quad ; \quad \overrightarrow{OD} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OA} \quad ; \quad \overrightarrow{OE} = -\tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{OA}$$

Quel est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda\,\overrightarrow{OA}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$?

2) Construire les points F, G et H tels que :

$$\overrightarrow{OF} = 2\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad ; \quad \overrightarrow{OH} = -\tfrac{2}{3}\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

Quel est l'ensemble des points N tels que $\overrightarrow{ON} = \lambda\,\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$?

3) Construire les points I, J, K et L tels que :

$$\overrightarrow{OI} = 2\,\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \qquad \overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OA} + 2\,\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OK} = \tfrac{3}{2}\,\overrightarrow{OA} - \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OB} \qquad \overrightarrow{OL} = \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OB}$$

Quel est l'ensemble des points P tels que $\overrightarrow{OP} = \lambda\,\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\,\overrightarrow{OB}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$?

8.22 Soit un triangle quelconque ABC. Les points I, J et K sont les milieux respectifs des côtés AB, BC et CA. Soit O un point quelconque du plan. Établir l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

8.23 Soient A et B deux points distincts, C un point situé au tiers du segment BA à partir de B et O un point quelconque du plan.
Montrer : $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OB}$.

8.24 On considère un triangle ABC et O un point quelconque du plan. Soit G le centre de gravité du triangle ABC.

1) Montrer : $3\,\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
2) Montrer : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
3) Déterminer les points P du plan qui vérifient $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

Indication : on admet dans cet exercice que le centre de gravité est le point d'intersection des médianes et qu'il se situe aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane à partir du sommet correspondant.

Réponses

8.21
1) la droite OA
2) la droite parallèle à la droite OA passant par le point B
3) la droite AB