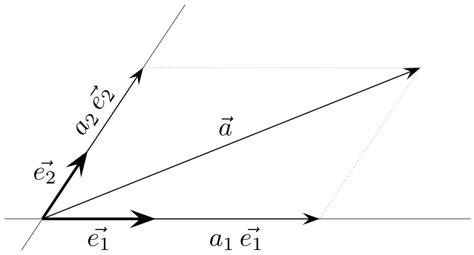
9 Bases

Bases de l'ensemble des vecteurs du plan

Une **base** de l'ensemble V_2 des vecteurs du plan est un couple de vecteurs *non colinéaires* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

Toute combinaison linéaire $a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2}$ détermine un unique vecteur $\vec{a}$ du plan. Réciproquement, tout vecteur $\vec{a}$ du plan se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$.

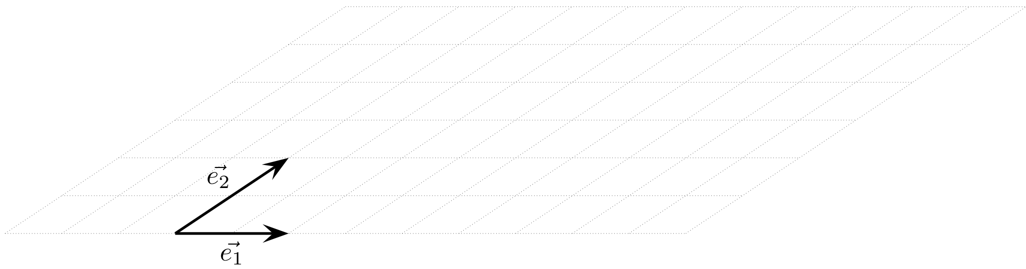


$$\vec{a} = a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2} \iff \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Les nombres réels a_1 et a_2 s'appellent les **composantes** du vecteur $\vec{a}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

9.1 Représenter dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ les vecteurs :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

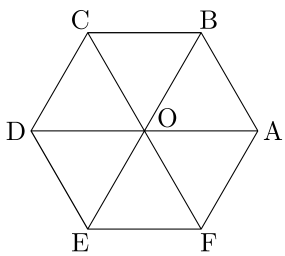


9.2 Soit un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs qui suivent

a) $\overrightarrow{EA}$ b) $\overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{ED}$ e) $\overrightarrow{CF}$ f) $\overrightarrow{AD}$

1) dans la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$;

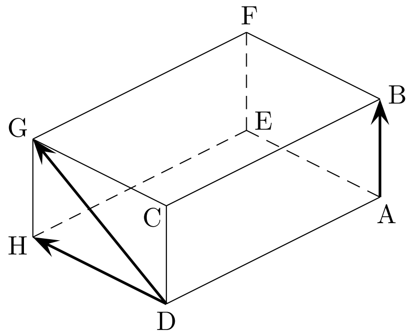
2) dans la base $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OA}\right)$.



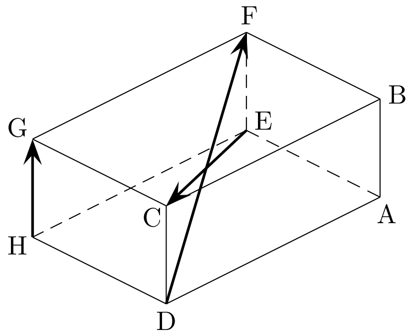
Bases de l'ensemble des vecteurs de l'espace

Des vecteurs de l'espace sont dits **coplanaires** s'ils sont représentables par des flèches contenues dans un même plan.

Exemples Soit un parallélipipède ABCDEFGH.



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ sont coplanaires.



$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HG}}$ sont coplanaires.

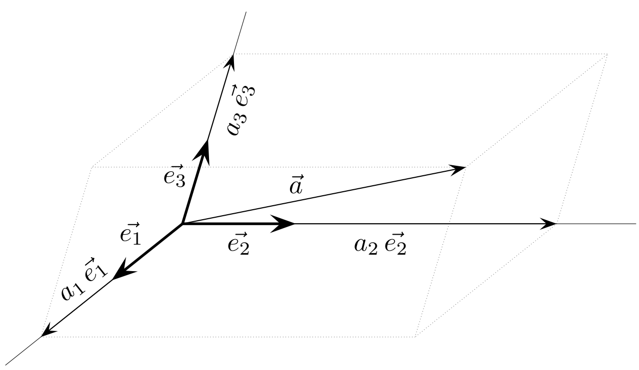
Remarques

1) Deux vecteurs de l'espace sont toujours coplanaires, qu'ils soient colinéaires ou non.
2) Trois vecteurs non nuls de l'espace sont coplanaires si et seulement si l'on peut exprimer l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.
   Dans les exemples précédents, $\overrightarrow{\mathrm{DG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{DH}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{HG}} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{DF}} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{EC}}$.

Une **base** de l'ensemble V_3 des vecteurs de l'espace est un triplet de vecteurs *non coplanaires* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$.

Toute combinaison linéaire $a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2} + a_3\,\vec{e_3}$ détermine un unique vecteur $\vec{a}$ de l'espace.

Réciproquement, tout vecteur $\vec{a}$ de l'espace se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ et $\vec{e_3}$.

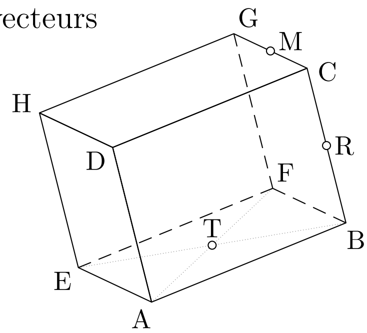


$$\vec{a} = a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2} + a_3\,\vec{e_3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Les nombres réels a_1, a_2 et a_3 s'appellent les **composantes** du vecteur $\vec{a}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$.

9.3 Soit le parallélipipède ABCDEFGH. On appelle M le milieu du côté CG, R le milieu du côté BC et T le centre du parallélogramme ABEF. Déterminer les composantes des vecteurs qui suivent :



a) $\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{AR}$ d) $\overrightarrow{DT}$ e) $\overrightarrow{MD}$

1) dans la base $\mathcal{B} = \big(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{AE}\big)$;

2) dans la base $\mathcal{B} = \big(\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{BR}\big)$.

Opérations avec les composantes

Proposition *Soient deux vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *du plan donnés par leurs composantes dans une base* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ *et un nombre réel* λ*. Alors :*

1) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$;

2) $\lambda\,\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \end{pmatrix}$.

Preuve

1) $\vec{a} + \vec{b} = a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2} + b_1\,\vec{e_1} + b_2\,\vec{e_2} = (a_1 + b_1)\,\vec{e_1} + (a_2 + b_2)\,\vec{e_2} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$

2) $\lambda\,\vec{a} = \lambda\,(a_1\,\vec{e_1} + a_2\,\vec{e_2}) = (\lambda\,a_1)\,\vec{e_1} + (\lambda\,a_2)\,\vec{e_2} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \end{pmatrix}$

9.4 Énoncer et démontrer un résultat similaire pour les vecteurs de l'espace.

9.5 Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les composantes des vecteurs qui suivent dans la base $\mathcal{B}$:

1) $\vec{a} + 4\,\vec{b} - 5\,\vec{c}$ 2) $-3\,\vec{a} + \frac{1}{2}\,\vec{b} - \vec{c}$ 3) $5\,\vec{b} - 2\,\vec{c}$

9.6 Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ -11 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer les composantes des vecteurs qui suivent dans la base $\mathcal{B}$:

1) $2\,\vec{a} - \vec{b} + 2\,\vec{d}$ 2) $-\vec{c} + 3\,\vec{f}$ 3) $\frac{1}{2}\,\vec{a} - \frac{1}{3}\,\vec{c} + 2\,\vec{d}$

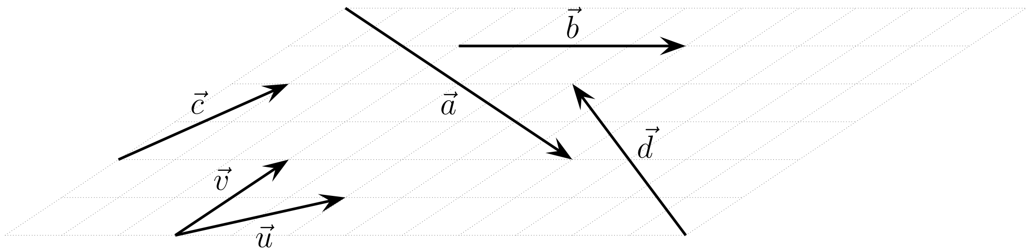
9.7 Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, on donne les vecteurs

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Trouver le vecteur $\vec{v}$ en résolvant les équations, puis calculer ses composantes.

1) $\vec{v} + 2\,\vec{v_2} - 5\,\vec{v_1} = \vec{0}$ 2) $-3\,\vec{v} - \vec{v_3} = \frac{1}{2}\,\vec{v_3} - \vec{v_1}$ 3) $\frac{5}{3}\,\vec{v} + \frac{3}{2}\,\vec{v_4} = \vec{v_3} - 2\,\vec{v_2}$

9.8 Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,;\vec{v})$.

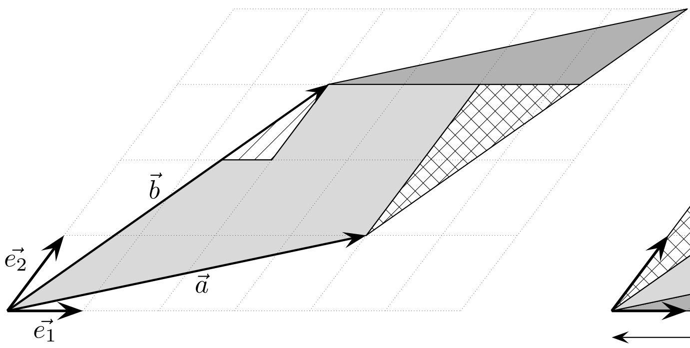


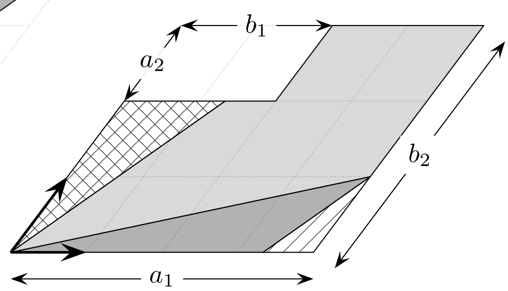
Dépendance linéaire et déterminants

Proposition *Soient deux vecteurs* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *du plan donnés par leurs composantes dans une base* $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$. *Alors*

$$\left|\det(\vec{a}\,;\vec{b})\right| = |a_1\,b_2 - a_2\,b_1| = \frac{\text{aire du parallélogramme construit sur } \vec{a} \text{ et } \vec{b}}{\text{aire du parallélogramme construit sur } \vec{e_1} \text{ et } \vec{e_2}}$$

Preuve





Corollaire *Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires ;

2) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement dépendants ;

3) $\det(\vec{a}\,;\vec{b}) = 0$.

9.9 Déterminer les vecteurs colinéaires. Justifier en exprimant l'un des vecteurs comme multiple de l'autre.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} -1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

9.10 Déterminer les vecteurs colinéaires. Justifier en exprimant l'un des vecteurs comme multiple de l'autre.

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{v_4} = \begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix}$$

Proposition *Soient trois vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ de l'espace donnés par leurs composantes dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$. Alors*

$$\left|\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})\right| = \frac{\textit{volume du parallélépipède construit sur } \vec{a},\ \vec{b} \textit{ et } \vec{c}}{\textit{volume du parallélépipède construit sur } \vec{e_1},\ \vec{e_2} \textit{ et } \vec{e_3}}$$

Preuve La démonstration se fera à l'exercice 14.2.

Corollaire *Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs de l'espace. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires ;

2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants ;

3) $\det(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}) = 0$.

9.11 Relativement à une base de l'espace, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Montrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.
Exprimer le vecteur $\vec{a}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{b}$ et $\vec{c}$.

9.12 Dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = 2\,\vec{e_1} - 5\,\vec{e_2} + \vec{e_3} \qquad \vec{b} = \vec{e_1} + 2\,\vec{e_2} + 3\,\vec{e_3} \qquad \vec{c} = 3\,\vec{e_1} + \vec{e_2} + 4\,\vec{e_3}$$

Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils coplanaires ?

9.13 Dans la base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont coplanaires.
2) Exprimer le vecteur $\vec{c}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
3) Montrer que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{d}$ ne sont pas coplanaires.
4) Peut-on exprimer le vecteur $\vec{d}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$?

9.14 Pour quelle valeur du paramètre m les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ 2\,m-1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ m+2 \end{pmatrix}$
2) $\vec{u} = \begin{pmatrix} m-1 \\ 2-m \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2\,m \\ 2\,m-3 \end{pmatrix}$
3) $\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m+1 \end{pmatrix}$

9.15 Pour quelle valeur du paramètre m les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

1) $\vec{u} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ m-5 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ m+4 \end{pmatrix}$
2) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ m \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} m+1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$
3) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ m \\ 1-m \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2\,m \\ m-2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 2\,m+1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

9.16 Dans une base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment une base.
2) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{c}$ et $\vec{d}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}\,;\vec{b})$.

9.17 Dans une base $\mathcal{B} = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Déterminer un nombre réel k et un vecteur $\vec{u}$, colinéaire avec le vecteur $\vec{a}$, tels que $\vec{u} + k\,\vec{b} = \vec{c}$.

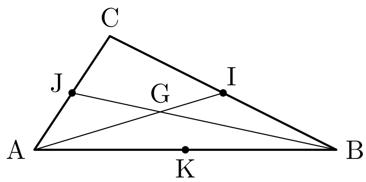
9.18 Dans l'espace muni d'une base, on donne les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont-ils coplanaires ?
2) Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ forment-ils une base ?
3) Exprimer le vecteur $\vec{d}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.
4) Quelles sont les composantes du vecteur $\vec{b}$ dans la base $(\vec{a}\,;\vec{c};\vec{d}\,)$?

9.19 **Barycentre d'un triangle**

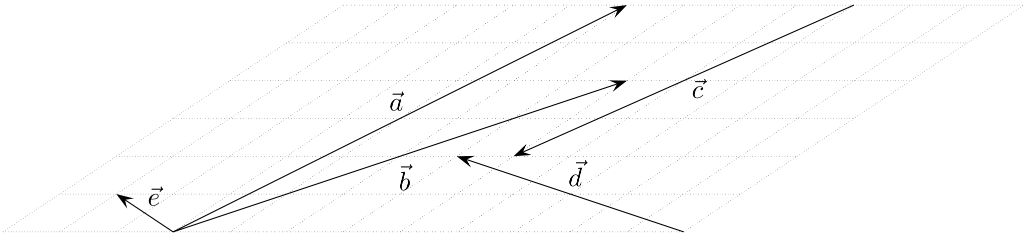
Soit un triangle ABC. On désigne respectivement par I, J et K les milieux des côtés BC, AC et AB.



1) Montrer qu'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ soit égal à $\lambda\,\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et un nombre $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ soit égal à $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mu\,\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$.
2) Calculer les composantes de $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et de $\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}})$.
3) Calculer, en fonction de λ et de μ, les composantes de $\vec{v} = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et de $\vec{w} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \mu\,\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$ dans la base $(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}})$.
4) Déduire de l'égalité $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \vec{v} = \vec{w}$ que $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$ et conclure que les médianes d'un triangle se coupent aux deux tiers de leur longueur.

Réponses

9.1



9.2

1) a) $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e) $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) a) $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\overrightarrow{CF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

9.3

1) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{DT} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ e) $\overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{DT} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ e) $\overrightarrow{MD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9.4

1) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

2) $\lambda\,\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_1 \\ \lambda\,a_2 \\ \lambda\,a_3 \end{pmatrix}$

9.5

1) $\begin{pmatrix} -38 \\ 21 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -16 \\ -20 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -30 \\ 26 \end{pmatrix}$

9.6 1) $\begin{pmatrix} 72 \\ 14 \\ -11 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -8 \\ -21 \\ 11 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} \frac{419}{6} \\ \frac{41}{2} \\ -\frac{46}{3} \end{pmatrix}$

9.7 1) $\vec{v} = 5\,\vec{v_1} - 2\,\vec{v_2} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2) $\vec{v} = \frac{1}{3}\,\vec{v_1} - \frac{1}{2}\,\vec{v_3} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{6} \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $\vec{v} = -\frac{6}{5}\,\vec{v_2} + \frac{3}{5}\,\vec{v_3} - \frac{9}{10}\,\vec{v_4} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{12}{5} \end{pmatrix}$

9.8 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

9.9 $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$ sont colinéaires : $\vec{v_3} = -3\,\vec{v_1}$.
$\vec{v_2}$ et $\vec{v_4}$ sont colinéaires : $\vec{v_4} = 2\,\vec{v_2}$.

9.10 $\vec{v_2}$ et $\vec{v_4}$ sont colinéaires : $\vec{v_2} = -\frac{3}{5}\,\vec{v_4}$.

9.11 $\vec{a} = -\frac{3}{2}\,\vec{b} + \frac{1}{2}\,\vec{c}$

9.12 Non

9.13 2) $\vec{c} = -\vec{a} + 2\,\vec{b}$ 4) Non, sinon les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{d}$ seraient coplanaires.

9.14 1) $m = 1$ ou $m = 3$ 2) $m = 3$ 3) $m = -1$ ou $m = 3$

9.15 1) $m = -4$ ou $m = 2$ 2) $m = -1$, $m = 0$ ou $m = 1$

3) Les vecteurs ne sont jamais coplanaires. 4) Les vecteurs sont toujours coplanaires.

9.16 2) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

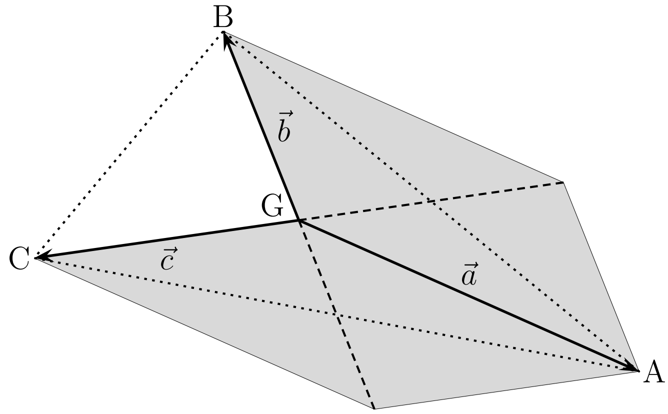
9.17 $k = \frac{35}{29}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{105}{29} \\ -\frac{30}{29} \end{pmatrix}$

9.18 1) Non 2) Oui

3) $\vec{d} = \frac{100}{23}\,\vec{a} - \frac{36}{23}\,\vec{b} - \frac{116}{23}\,\vec{c}$ 4) $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{25}{9} \\ -\frac{29}{9} \\ -\frac{23}{36} \end{pmatrix}$

9.20 Barycentre d'un triangle (1)

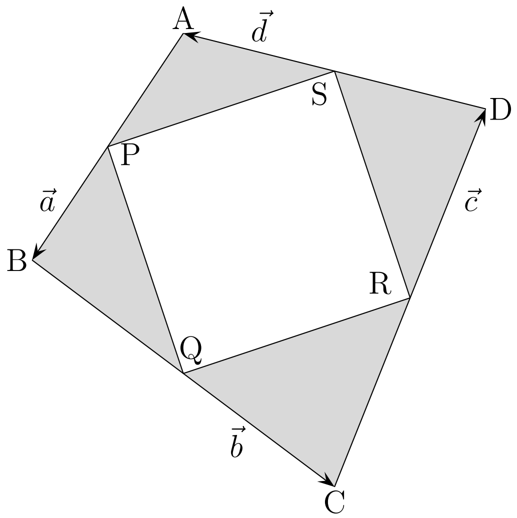
Soient $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{GA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{GB}}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{GC}}$ trois vecteurs, deux à deux linéairement indépendants. Supposons que les parallélogrammes construits sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$, respectivement sur $\vec{a}$ et $\vec{c}$, sont tels que la diagonale $\vec{a} + \vec{b}$ est parallèle à $\vec{c}$, respectivement que la diagonale $\vec{a} + \vec{c}$ est parallèle à $\vec{b}$.



1) Constater qu'il existe des nombres λ, $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{a} + \vec{b} = \lambda\,\vec{c}$ et que $\vec{a} + \vec{c} = \mu\,\vec{b}$.
2) Montrer que $\lambda = \mu = -1$. En déduire que $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$.
3) Si G désigne l'intersection des médianes issues des sommets B et C du triangle ABC, montrer que $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$.
4) Montrer que toute paire de médianes d'un triangle se coupent aux $\frac{2}{3}$ de leur longueur.

9.21 Théorème de Pierre Varignon, 1731

Soit un quadrilatère ABCD quelconque. On appelle P, Q, R et S les milieux des segments AB, BC, CD et DA.



1) Montrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.
2) Montrer que l'aire du quadrilatère ABCD est donnée par l'une des formules :

$$\text{aire (ABCD)} = \frac{\det(\vec{b}\,; -\vec{a}) + \det(\vec{d}\,; -\vec{c})}{2} = \frac{\det(\vec{c}\,; -\vec{b}) + \det(\vec{a}\,; -\vec{d})}{2}$$

3) Montrer que l'aire du quadrilatère PQRS est donnée par l'une des formules :

$$\begin{aligned}\text{aire (PQRS)} &= \det\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\,; \frac{-\vec{b}-\vec{a}}{2}\right) = \det\left(\frac{\vec{c}+\vec{d}}{2}\,; \frac{-\vec{c}-\vec{b}}{2}\right) \\ &= \det\left(\frac{\vec{d}+\vec{a}}{2}\,; \frac{-\vec{d}-\vec{c}}{2}\right) = \det\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\,; \frac{-\vec{a}-\vec{d}}{2}\right)\end{aligned}$$

4) Utiliser 2) et 3) pour établir que

$$4 \cdot \Big(\text{aire(PQRS)}\Big) = 2 \cdot \Big(\text{aire (ABCD)}\Big)$$

5) Montrer que la somme des aires des quatre triangles APS, BPQ, CRQ et DSR (en gris) est égale à l'aire du parallélogramme PQRS (en blanc).
6) En utilisant que l'aire d'un triangle diminué est le quart de l'aire du triangle initial, démontrer, sans utiliser les déterminants, la formule précèdente, c'-à-d : $\text{aire(PQRS)} = \frac{1}{2} \cdot \Big(\text{aire (ABCD)}\Big)$.