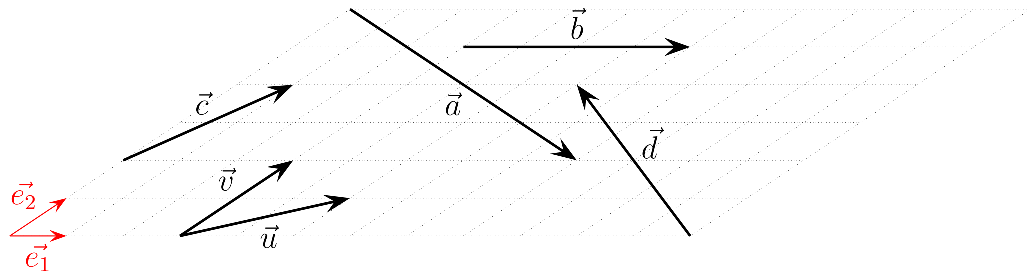
9.8



Dans la base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ ont respectivement pour composantes :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,;\vec{v}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{a} = a_1\,\vec{u} + a_2\,\vec{v}$

En écrivant les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, on obtient :

$$\vec{a} = a_1\,\vec{u} + a_2\,\vec{v}$$
$$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,a_1 \\ a_1 + 2\,a_2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 8 = 2\,a_1 \\ -4 = a_1 + 2\,a_2 \end{cases}$$

La première équation donne immédiatement $a_1 = 4$.

La seconde équation s'écrit donc $-4 = 4 + 2\,a_2$, de sorte que $a_2 = -4$.

On conclut que $\vec{a} = 4\,\vec{u} - 4\,\vec{v}$

c'est-à-dire $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,;\vec{v})$.

2) $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,;\vec{v}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{b} = b_1\,\vec{u} + b_2\,\vec{v}$

En écrivant les composantes des vecteurs $\vec{b}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, on obtient :

$$\vec{b} = b_1\,\vec{u} + b_2\,\vec{v}$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,b_1 \\ b_1 + 2\,b_2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4 = 2\,b_1 \\ 0 = b_1 + 2\,b_2 \end{cases}$$

La première équation donne immédiatement $b_1 = 2$.
La seconde équation s'écrit donc $0 = 2 + 2\,b_2$, de sorte que $b_2 = -1$.

On conclut que $\vec{b} = 2\,\vec{u} - \vec{v}$
c'est-à-dire $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,;\vec{v})$.

3) $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,;\vec{v}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{c} = c_1\,\vec{u} + c_2\,\vec{v}$

En écrivant les composantes des vecteurs $\vec{c}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, on obtient :

$\vec{c} = c_1\,\vec{u} + c_2\,\vec{v}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,c_1 \\ c_1 + 2\,c_2 \end{pmatrix}$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$\begin{cases} 1 = 2\,c_1 \\ 2 = c_1 + 2\,c_2 \end{cases}$

La première équation donne immédiatement $c_1 = \frac{1}{2}$.
La seconde équation s'écrit donc $2 = \frac{1}{2} + 2\,c_2$, de sorte que $c_2 = \frac{3}{4}$.

On conclut que $\vec{c} = \frac{1}{2}\,\vec{u} + \frac{3}{4}\vec{v}$
c'est-à-dire $\vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,;\vec{v})$.

4) $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,;\vec{v}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{d} = d_1\,\vec{u} + d_2\,\vec{v}$

En écrivant les composantes des vecteurs $\vec{d}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, on obtient :

$\vec{d} = d_1\,\vec{u} + d_2\,\vec{v}$

$\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,d_1 \\ d_1 + 2\,d_2 \end{pmatrix}$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$\begin{cases} -6 = 2\,d_1 \\ 4 = d_1 + 2\,d_2 \end{cases}$

La première équation donne immédiatement $d_1 = -3$.
La seconde équation s'écrit donc $4 = -3 + 2\,d_2$, de sorte que $d_2 = \frac{7}{2}$.

On conclut que $\vec{d} = -3\,\vec{u} + \frac{7}{2}\vec{v}$
c'est-à-dire $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}\,;\vec{v})$.