9.10 1) $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v_2} = \lambda\,\vec{v_1}$.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\,\lambda \\ -\frac{3}{2}\,\lambda \\ 3\,\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9 = \frac{3}{4}\,\lambda \\ 6 = -\frac{3}{2}\,\lambda \\ 15 = 3\,\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 12 \\ \lambda = -4 \\ \lambda = 5 \end{cases}$$

Puisque l'on obtient des valeurs différentes pour λ, les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ ne sont pas colinéaires.

2) $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v_3} = \lambda\,\vec{v_1}$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\,\lambda \\ -\frac{3}{2}\,\lambda \\ 3\,\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 = \frac{3}{4}\,\lambda \\ -3 = -\frac{3}{2}\,\lambda \\ \frac{5}{2} = 3\,\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{16}{3} \\ \lambda = 2 \\ \lambda = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Puisque l'on obtient des valeurs différentes pour λ, les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_3}$ ne sont pas colinéaires.

3) $\vec{v_1}$ et $\vec{v_4}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v_4} = \lambda\,\vec{v_1}$.

$$\begin{pmatrix} -15 \\ -10 \\ -25 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\,\lambda \\ -\frac{3}{2}\,\lambda \\ 3\,\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -15 = \frac{3}{4}\,\lambda \\ -10 = -\frac{3}{2}\,\lambda \\ -25 = 3\,\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = -20 \\ \lambda = \frac{20}{3} \\ \lambda = -\frac{25}{3} \end{cases}$$

Puisque l'on obtient des valeurs différentes pour λ, les vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_4}$ ne sont pas colinéaires.

4) $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v_3} = \lambda\,\vec{v_2}$.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\,\lambda \\ 6\,\lambda \\ 15\,\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 = 9\,\lambda \\ -3 = 6\,\lambda \\ \frac{5}{2} = 15\,\lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{4}{9} \\ \lambda = -\frac{1}{2} \\ \lambda = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Puisque l'on obtient des valeurs différentes pour λ, les vecteurs $\vec{v_2}$ et $\vec{v_3}$ ne sont pas colinéaires.

5) $\vec{v_2}$ et $\vec{v_4}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v_4} = \lambda\,\vec{v_2}$.

$$\begin{pmatrix}-15\\-10\\-25\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}9\\6\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\,\lambda\\6\,\lambda\\15\,\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-15 = 9\,\lambda\\-10 = 6\,\lambda\\-25 = 15\,\lambda\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\lambda = -\frac{5}{3}\\\lambda = -\frac{5}{3}\\\lambda = -\frac{5}{3}\end{cases}$$

Puisque l'on obtient une solution commune $\lambda = -\frac{5}{3}$, il en résulte que $\vec{v_4} = -\frac{5}{3}\,\vec{v_2}$, si bien que les vecteurs $\vec{v_2}$ et $\vec{v_4}$ sont colinéaires.

6) $\vec{v_3}$ et $\vec{v_4}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v_4} = \lambda\,\vec{v_3}$.

$$\begin{pmatrix}-15\\-10\\-25\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}4\\-3\\\frac{5}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\,\lambda\\-3\,\lambda\\\frac{5}{2}\,\lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-15 = 4\,\lambda\\-10 = -3\,\lambda\\-25 = \frac{5}{2}\,\lambda\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\lambda = -\frac{15}{4}\\\lambda = -\frac{10}{3}\\\lambda = -10\end{cases}$$

Puisque l'on obtient des valeurs différentes pour λ, les vecteurs $\vec{v_3}$ et $\vec{v_4}$ ne sont pas colinéaires.