9.13 1) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & -8 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 5 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & -8 \\ -1 & 3 & 7 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & 1 \\ 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = -35+8-54+3+120-42 = 0$

Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont bel et bien coplanaires.

2) Exprimer le vecteur $\vec{c}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ revient à déterminer deux scalaires λ et μ tels que $\vec{c} = \lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b}$.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,\lambda + \mu \\ 6\,\lambda - \mu \\ -\lambda + 3\,\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3 = 5\,\lambda + \mu \\ -8 = 6\,\lambda - \mu \\ 7 = -\lambda + 3\,\mu \end{cases}$$

L'addition des deux premières équations donne $-11 = 11\,\lambda$, d'où $\lambda = -1$.
La première équation s'écrit donc $-3 = 5 \cdot (-1) + \mu$, si bien que $\mu = 2$.
Contrôlons que la dernière équation est bien vérifiée : $7 = -(-1) + 3 \cdot 2$.

On a donc trouvé $\vec{c} = -\vec{a} + 2\,\vec{b}$.

3) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 5 & 1 \\ 6 & -1 \\ -1 & 3 \end{matrix} = 10-5+108-6-75+12$

$= 44 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{d}$ ne sont donc pas coplanaires.

4) Si l'on pouvait exprimer le vecteur $\vec{d}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, alors les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{d}$ seraient linéairement dépendants et seraient par conséquent coplanaires.
Vu le résultat obtenu en 3), il est impossible d'exprimer le vecteur $\vec{d}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.