

9.15

$$\begin{aligned}
 1) \quad 0 &= \begin{vmatrix} m+1 & -3 & 3 \\ 3 & m-5 & 3 \\ 6 & -6 & m+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+1 & -3 & 3 \\ 3 & m-5 & 3 \\ 6 & -6 & m+4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m+1 & -3 \\ 3 & m-5 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\
 &= (m+1)(m-5)(m+4) - 54 - 54 - 18(m-5) + 18(m+1) + 9(m+4) \\
 &= m^3 - 21m - 20 - 108 - 18m + 90 + 18m + 18 + 9m + 36 \\
 &= m^3 - 12m + 16
 \end{aligned}$$

Pour factoriser le polynôme $P(m) = m^3 - 12m + 16$, il faut deviner l'un de ses zéros. On sait que les zéros entiers possibles sont les diviseurs de 16, à savoir $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ et ± 16 .

$$P(1) = 1^3 - 12 \cdot 1 + 16 = 5 \neq 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 12 \cdot (-1) + 16 = 27 \neq 0$$

$$P(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0$$

Utilisons à présent le schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -12 & 16 \\
 2 & & 2 & 4 & -16 \\
 \hline
 & 1 & 2 & -8 & 0
 \end{array}$$

$$P(m) = m^3 - 12m + 16 = (m-2) \underbrace{(m^2 + 2m - 8)}_{(m-2)(m+4)} = (m-2)^2 (m+4)$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si $m = -4$ ou $m = 2$.

$$\begin{aligned}
 2) \quad 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m+1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \\
 &= 1 + m + m^2(m+1) - (m+1) - m^2 - m \\
 &= 1 + m + m^3 + m^2 - m - 1 - m^2 - m \\
 &= m^3 - m = m(m^2 - 1) = m(m+1)(m-1)
 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si $m = -1$, $m = 0$ ou $m = 1$.

$$\begin{aligned}
 3) \quad 0 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2m \\ -4 & m & m-2 \\ 0 & 1-m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2m \\ -4 & m & m-2 \\ 0 & 1-m & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & m \\ 0 & 1-m \end{vmatrix} \\
 &= 2m + 0 - 8m(1-m) - 0 - 2(1-m)(m-2) + 12 \\
 &= 2m - 8m + 8m^2 + 2m^2 - 6m + 4 + 12 \\
 &= 10m^2 - 12m + 16 = 2(5m^2 - 6m + 8) \\
 \Delta &= (-6)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 8 = -124 < 0
 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont jamais coplanaires.

$$\begin{aligned}
4) \quad 0 &= \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2m+1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 2m+1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & m+1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 32 + 0 + 12(2m+1) - 0 - 20 - 24(m+1) \\
&= 32 + 24m + 12 - 20 - 24m - 24 = 0
\end{aligned}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires quel que soit $m \in \mathbb{R}$.