9.16 1) Deux vecteurs quelconques du plan forment une base, à la condition qu'ils soient non colinéaires. Pour montrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ forment une base du plan, il suffit donc de prouver qu'ils sont non colinéaires :

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-9) - 4 \cdot 3 = -30 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont donc pas colinéaires.

2) (a) $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}\,;\vec{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{c} = c_1\,\vec{a} + c_2\,\vec{b}$

En écrivant les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, on obtient :

$\vec{c} = c_1\,\vec{a} + c_2\,\vec{b}$

$\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,c_1 + 3\,c_2 \\ 4\,c_1 - 9\,c_2 \end{pmatrix}$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$\begin{cases} 12 = 2\,c_1 + 3\,c_2 \\ -6 = 4\,c_1 - 9\,c_2 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{array}$

Les combinaisons linéaires indiquées en marge donnent tour à tour :

$30 = 10\,c_1$ c'est-à-dire $c_1 = 3$

$30 = 15\,c_2$ à savoir $c_2 = 2$

On conclut que $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}\,;\vec{b})$.

(b) $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}\,;\vec{b}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{d} = d_1\,\vec{a} + d_2\,\vec{b}$

En écrivant les composantes des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{d}$ dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$, on obtient :

$\vec{d} = d_1\,\vec{a} + d_2\,\vec{b}$

$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,d_1 + 3\,d_2 \\ 4\,d_1 - 9\,d_2 \end{pmatrix}$

Il s'agit dès lors de résoudre le système suivant :

$\begin{cases} 7 = 2\,d_1 + 3\,d_2 \\ -1 = 4\,d_1 - 9\,d_2 \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{array}$

Les combinaisons linéaires indiquées en marge donnent tour à tour :

$20 = 10\,d_1$ c'est-à-dire $d_1 = 2$

$15 = 15\,d_2$ à savoir $d_2 = 1$

On conclut que $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_2 = (\vec{a}\,;\vec{b})$.