9.18 1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \\ 6 & 7 \end{matrix} = 36 - 18 + 0 - 0 + 14 - 9 = 23 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ ne sont donc pas coplanaires.

2) Trois vecteurs quelconques de l'espace forment une base, à condition qu'ils soient non coplanaires. Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ forment une base de l'espace s'ils ne sont pas coplanaires.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 6 & 3 \end{matrix} = 0 + 0 + 12 + 24 - 0 - 0 = 36 \neq 0$

Les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont non coplanaires et forment donc une base de l'espace.

3) Il s'agit de déterminer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{d} = \lambda_1\,\vec{a} + \lambda_2\,\vec{b} + \lambda_3\,\vec{c}$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2 \\ \lambda_1 + 6\,\lambda_2 - \lambda_3 \\ 6\,\lambda_1 + 7\,\lambda_2 + 3\,\lambda_3 \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, il faut résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4 &=& 2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2 \\ 0 &=& \lambda_1 + 6\,\lambda_2 - \lambda_3 \\ 0 &=& 6\,\lambda_1 + 7\,\lambda_2 + 3\,\lambda_3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c|c} 1 & -3 \\ -2 & \\ & 1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4 &=& 2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2 \\ 4 &=& -\,9\,\lambda_2 + 2\,\lambda_3 \\ -12 &=& -\,2\,\lambda_2 + 3\,\lambda_3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c} \\ 2 \\ -9 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4 &=& 2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2 \\ 4 &=& -\,9\,\lambda_2 + 2\,\lambda_3 \\ 116 &=& -\,23\,\lambda_3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c} \\ 23 \\ 2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4 &=& 2\,\lambda_1 + 3\,\lambda_2 \\ 324 &=& -\,207\,\lambda_2 \\ 116 &=& -\,23\,\lambda_3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c} 69 \\ 1 \\ \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 600 &=& 138\,\lambda_1 \\ 324 &=& -\,207\,\lambda_2 \\ 116 &=& -\,23\,\lambda_3 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|c} \frac{1}{138} \\ -\frac{1}{207} \\ -\frac{1}{23} \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{100}{23} &=& \lambda_1 \\ -\frac{36}{23} &=& \lambda_2 \\ -\frac{116}{23} &=& \lambda_3 \end{array}\right.$$

En définitive $\vec{d} = \frac{100}{23}\,\vec{a} - \frac{36}{23}\,\vec{b} - \frac{116}{23}\,\vec{c}$.

4) $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{a}\,;\vec{c}\,;\vec{d}\,) \iff \vec{b} = b_1\,\vec{a} + b_2\,\vec{c} + b_3\,\vec{d}$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + b_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,b_1 + 4\,b_3 \\ b_1 - b_2 \\ 6\,b_1 + 3\,b_2 \end{pmatrix}$$

Il s'agit par conséquent de résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3 &=& 2\,b_1 \phantom{{}-b_2} + 4\,b_3 \\ 6 &=& b_1 - b_2 \\ 7 &=& 6\,b_1 + 3\,b_2 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{c} \\ 3 \\ 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3 &=& 2\,b_1 \phantom{{}-b_2} + 4\,b_3 \\ 6 &=& b_1 - b_2 \\ 25 &=& 9\,b_1 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{c} 9 \\ \\ -2 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{c} \\ -9 \\ 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -23 &=& 36\,b_3 \\ -29 &=& 9\,b_2 \\ 25 &=& 9\,b_1 \end{array}\right. \quad \left|\begin{array}{c} \frac{1}{36} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\frac{23}{36} &=& b_3 \\ -\frac{29}{9} &=& b_2 \\ \frac{25}{9} &=& b_1 \end{array}\right.$$

On conclut que $\vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{25}{9} \\ -\frac{29}{9} \\ -\frac{23}{36} \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{a}\,;\vec{c}\,;\vec{d}\,)$.