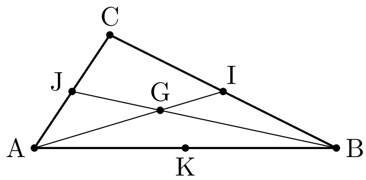
9.19



1) (a) Vu que les points A, G et I sont alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont ainsi linéairement dépendants, si bien qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AG} = \lambda\,\overrightarrow{AI}$.

   (b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}$

   Vu que les points B, G et J sont alignés, les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont ainsi linéairement dépendants, si bien qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BG} = \mu\,\overrightarrow{BJ}$.

   C'est pourquoi $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{BJ}$.

2) (a)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}\\
&= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BC}\\
&= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\,(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})\\
&= \overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{AB} - \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\\
&= \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BJ} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}\\
&= \overrightarrow{BA} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\\
&= -\overrightarrow{AB} + \tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{AC}\\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3) (a) $\vec{v} = \lambda\,\overrightarrow{AI} = \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\lambda \\ \frac{1}{2}\,\lambda \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{BJ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mu \\ \frac{1}{2}\,\mu \end{pmatrix}$

4) L'égalité $\overrightarrow{AG} = \vec{v} = \vec{w}$ implique

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,\lambda \\ \frac{1}{2}\,\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mu \\ \frac{1}{2}\,\mu \end{pmatrix}$$

Pour déterminer λ et μ, il faut résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,\lambda = 1 - \mu \\ \frac{1}{2}\,\lambda = \frac{1}{2}\,\mu \end{cases}$$

La soustraction de ces équations donne $0 = 1 - \frac{3}{2}\,\mu$, d'où l'on tire $\mu = \frac{2}{3}$.
La seconde équation implique aussitôt $\lambda = \mu = \frac{2}{3}$.

On a donc obtenu $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BG}} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{BJ}}$, ce qui signifie que les médianes d'un triangle se coupent aux deux tiers de leur longueur.