10 Repères et coordonnées

Repères dans le plan

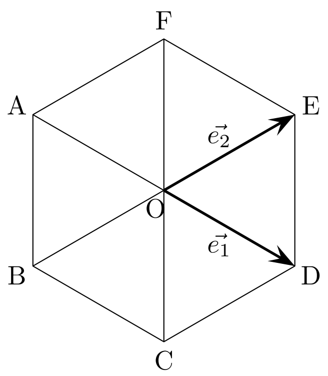
Un **repère du plan** est formé d'un point O du plan et d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\}$ du plan vectoriel. On appelle O l'**origine** et $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\}$ la **base associée** du repère.

Les **coordonnées** d'un point A du plan relativement à un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ relativement à la base associée $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$.

$$\mathrm{A}(a_1\,;a_2) \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a_1 est la première coordonnée ou **abscisse** du point A ;
a_2 est la seconde coordonnée ou **ordonnée** du point A.

Exemple



$$\mathrm{A}(-1\,;0) \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{D}(1\,;0) \iff \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}(0\,;-1) \iff \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{E}(0\,;1) \iff \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{C}(1\,;-1) \iff \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{F}(-1\,;1) \iff \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Repères dans l'espace

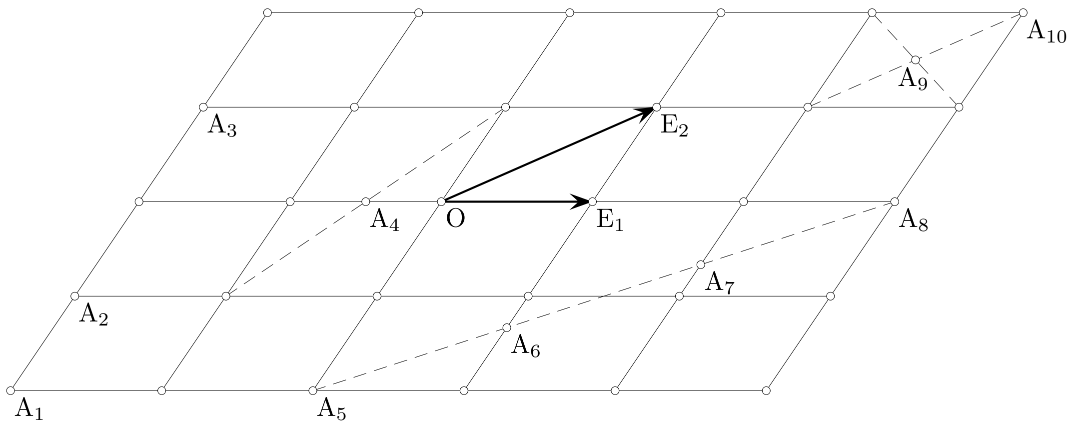
Un **repère de l'espace** est formé d'un point O de l'espace et d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3}\}$ de l'espace vectoriel. On appelle O l'**origine** et $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3}\}$ la **base associée** du repère.

Les **coordonnées** d'un point A de l'espace relativement à un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ relativement à la base associée $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$.

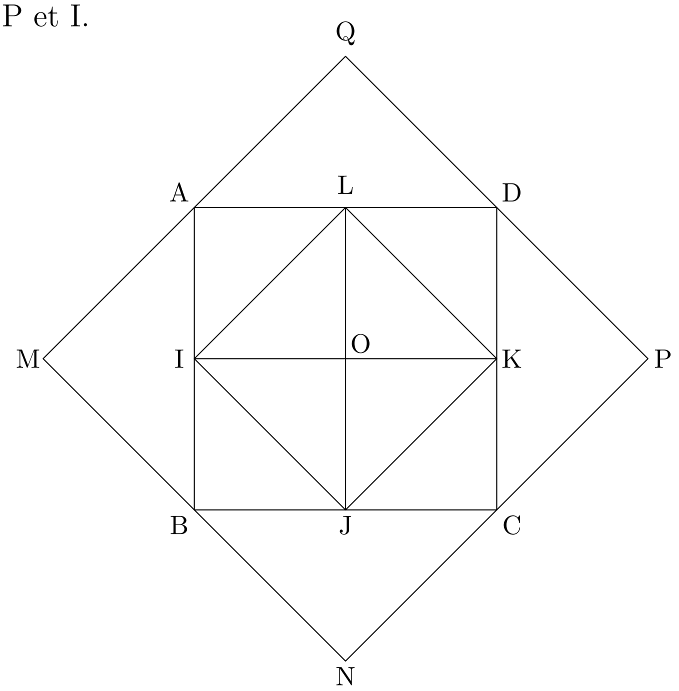
$$\mathrm{A}(a_1\,;a_2\,;a_3) \iff \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

a_1 est la première coordonnée ou **abscisse** du point A ;
a_2 est la deuxième coordonnée ou **ordonnée** du point A ;
a_3 est la troisième coordonnée ou **cote** du point A.

10.1 Déterminer les coordonnées des points A_1 à A_{10} dans le repère $\mathcal{R} = (O\,;\overrightarrow{OE_1}\,;\overrightarrow{OE_2})$.



10.2
1) Dans le repère $\mathcal{R} = (O\,;\overrightarrow{OK}\,;\overrightarrow{OL})$, déterminer les coordonnées des points B, P et I.
2) Dans le repère $\mathcal{R} = (B\,;\overrightarrow{BJ}\,;\overrightarrow{BI})$, déterminer les coordonnées des points B, P et I.



10.3 Soient $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$ deux points du plan. Démontrer, à l'aide de l'exercice 8.18, que les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont données par :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Peut-on généraliser cette formule pour des points de l'espace ?

10.4 Dans un repère, on donne les points $A(0\,;4)$, $B(8\,;-1)$, $C(-5\,;-4)$, $D(-6\,;0)$ et $E(\frac{1}{2}\,;-\frac{2}{3})$. Déterminer les composantes des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{DA} \text{ et } \overrightarrow{ED}.$$

10.5 On donne les points $A(3\,;-2\,;1)$, $B(1\,;5\,;-2)$ et $C(0\,;-4\,;5)$.
Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA}$.

10.6 Soient les points $A(-2\,;1)$, $B(3\,;2)$ et $C(0\,;3)$. Soit encore D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

1) Calculer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
2) Calculer les coordonnées du point D.

10.7 On donne les points $A(-1\,;-1)$, $B(1\,;2)$ et $C(3\,;-2)$.

1) Calculer les coordonnées du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.
2) Calculer les coordonnées du point E tel que le quadrilatère ABEC soit un parallélogramme.

10.8 Relativement à un repère, on donne les points $A(5\,;2)$, $B(6\,;-3)$, $C(7\,;8)$, $D(3\,;8)$, $E(5\,;-6)$ et $F(-1\,;36)$.

1) Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2) Les points D, E et F sont-ils alignés ?

10.9 Les points A, B et C sont-ils alignés ?

1)	$A(3\,;1\,;-1)$	$B(2\,;0\,;4)$	$C(-3\,;2\,;5)$
2)	$A(2\,;-1\,;5)$	$B(1\,;1\,;-2)$	$C(4\,;-5\,;-11)$
3)	$A(3\,;1\,;\frac{1}{2})$	$B(2\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2})$	$C(9\,;4\,;\frac{1}{2})$

10.10 Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre les points A, B et C sont-ils alignés ?

1)	$A(2\,;t)$	$B(t-1\,;2\,t+1)$	$C(2+t\,;3)$
2)	$A(-1\,;2)$	$B(\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{2})$	$C(t\,;-3\,t+1)$
3)	$A(-1\,;2)$	$B(\frac{1}{4}\,;-\frac{1}{2})$	$C(t^2\,;3\,t-4)$

10.11 Montrer que les points $A(0\,;2\,;4)$, $B(1\,;-1\,;3)$, $C(-8\,;2\,;1)$ et $D(-6\,;-4\,;-1)$ sont coplanaires.

10.12 Déterminer si le point D appartient au plan ABC :

1)	$A(0\,;0\,;0)$	$B(1\,;0\,;0)$	$C(0\,;1\,;0)$	$D(0\,;0\,;1)$
2)	$A(1\,;3\,;-2)$	$B(4\,;-2\,;3)$	$C(2\,;0\,;-1)$	$D(12\,;-14\,;17)$
3)	$A(3\,;4\,;8)$	$B(1\,;-5\,;0)$	$C(3\,;2\,;1)$	$D(3\,;4\,;8)$
4)	$A(2\,;-3\,;2)$	$B(1\,;-2\,;2)$	$C(1\,;-3\,;3)$	$D(1\,;-3\,;2)$

10.13 Déterminer les valeurs des paramètres pour lesquelles les points A, B, C et D sont coplanaires.

1) $A(1\,;1\,;9)$	$B(5\,;\frac{3}{2}\,;14)$	$C(0\,;-3\,;0)$	$D(-\frac{8}{3}\,;-\frac{8}{3}\,;t)$
2) $A(1\,;4\,;-3)$	$B(4\,;-1\,;-2)$	$C(3\,;4\,;1)$	$D(t+1\,;3\,;2\,t)$
3) $A(-1\,;5\,;-4)$	$B(m\,;8\,;2)$	$C(-4\,;m\,;-10)$	$D(2\,;8\,;m)$
4) $A(t-m\,;m-t\,;2)$	$B(t-m+1\,;m-t+1\,;3)$	$C(-m\,;-t\,;0)$	$D(m\,;t\,;m\,t)$

10.14 Soient $A(a_1\,;a_2)$ et $B(b_1\,;b_2)$ deux points du plan. Démontrer que les coordonnées du point M, milieu de A et B, sont données par :

$$M\left(\frac{a_1+b_1}{2}\,;\frac{a_2+b_2}{2}\right).$$

Indication : utiliser le résultat de l'exercice 8.19.

Peut-on généraliser cette formule pour des points de l'espace ?

10.15 Soient $A(a_1\,;a_2)$, $B(b_1\,;b_2)$ et $C(c_1\,;c_2)$ trois points du plan. Démontrer que les coordonnées du point G, centre de gravité des points A, B et C, sont données par :

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\,;\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right).$$

Indication : reprendre l'exercice 9.19 et calculer $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\,\overrightarrow{AI}$.

Peut-on généraliser cette formule pour des points de l'espace ?

10.16 On donne les points $A(3\,;-2\,;1)$, $B(1\,;5\,;-2)$ et $C(0\,;-4\,;5)$.
Calculer les coordonnées des milieux des segments AB, BC et CA ainsi que celles du centre de gravité du triangle ABC.

10.17 Soit le triangle ABC de sommets $A(-2\,;-3)$, $B(4\,;-1)$ et $C(2\,;3)$.

1) Déterminer les coordonnées des sommets du triangle diminué $A^*B^*C^*$ (A^* est le milieu de BC, B^* est le milieu de AC et C^* est le milieu de AB).
2) Déterminer le centre de gravité G du triangle ABC et le centre de gravité G^* du triangle $A^*B^*C^*$.

10.18

1) Déterminer les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on connaît les sommets $A(6\,;-1)$ et $B(-2\,;6)$ ainsi que le centre de gravité $G(3\,;4)$.
2) Déterminer les coordonnées des sommets B et C du triangle ABC, connaissant le sommet $A(6\,;-2)$, le milieu $M_{AC}(2\,;2)$ du côté AC et le milieu $M_{BC}(3\,;1)$ du côté BC.

10.19 Soient les points $A(-2\,;3)$, $B(2\,;1)$, $C(3\,;-5)$ et $D(-5\,;-1)$.

1) Dessiner le quadrilatère ABCD. Quelle est sa nature ?
2) On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments AD, BC, AC et BD. Calculer les coordonnées des points I, J, K et L.
3) Les points I, J, K et L sont-ils alignés ?

Réponses

10.1 $A_1(0\,;-2)$ $A_2(-1\,;-1)$ $A_3(-3\,;1)$ $A_4(-\frac{1}{2}\,;0)$ $A_5(2\,;-2)$
$A_6(\frac{7}{3}\,;-\frac{4}{3})$ $A_7(\frac{8}{3}\,;-\frac{2}{3})$ $A_8(3\,;0)$ $A_9(1\,;\frac{3}{2})$ $A_{10}(1\,;2)$

10.2 1) $B(-1\,;-1)$, $P(2\,;0)$ et $I(-1\,;0)$ 2) $B(0\,;0)$, $P(3\,;1)$ et $I(0\,;1)$

10.4 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{EC} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 33 \\ 20 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{ED} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -39 \\ 4 \end{pmatrix}$

10.5 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

10.6 1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ 2) $D(5\,;4)$

10.7 1) $D(1\,;-5)$ 2) $E(5\,;1)$.

10.8 1) non 2) oui

10.9 1) non 2) non 3) oui

10.10 1) A, B et C ne sont jamais alignés 2) $t = 1$ 3) $t = \frac{-3-\sqrt{41}}{4}$ ou $t = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$

10.12 1) non 2) oui 3) oui 4) non

10.13 1) $t = -2$ 2) impossible 3) $m = -4$ ou $m = 2$ 4) $m = 2$ ou $t = 2$ ou $m = t$

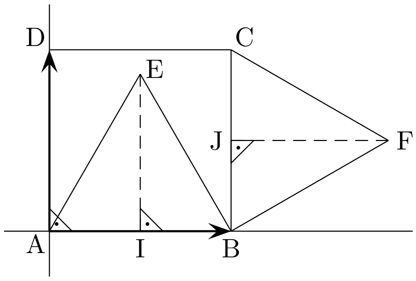
10.16 $M_{AB}(2\,;\frac{3}{2}\,;-\frac{1}{2})$ $M_{BC}(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2})$ $M_{CA}(\frac{3}{2}\,;-3\,;3)$ $G(\frac{4}{3}\,;-\frac{1}{3}\,;\frac{4}{3})$

10.17 1) $A^*(3\,;1)$, $B^*(0\,;0)$ et $C^*(1\,;-2)$ 2) $G = G^* = (\frac{4}{3}\,;\frac{-1}{3})$

10.18 1) $C(5\,;7)$ 2) $B(8\,;-4)$ et $C(-2\,;6)$

10.19 1) Le quadrilatère ABCD est un trapèze.
2) $I(-\frac{7}{2}\,;1)$, $J(\frac{5}{2}\,;-2)$, $K(\frac{1}{2}\,;-1)$ et $L(-\frac{3}{2}\,;0)$
3) Les points I, J, K et L sont alignés.

10.20 ABCD est un carré de côté 1, ABE et BCF sont deux triangles équilatéraux.



1) Donner dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD})$ les coordonnées des points A, B, C et D.
2) Déterminer les coordonnées des points I et E.
3) Déterminer les coordonnées des points J et F.
4) Les points D, E et F sont-ils alignés ?

10.21 Soient A et B deux points distincts du plan ; on appelle I le milieu de AB.

1) Placer un point P dans le plan et dessiner un représentant du vecteur $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}$. Que peut-on conjecturer ?
2) Recommencer avec un autre point P′.
3) Tester cette conjecture sur d'autres points.
4) La démontrer.

10.22 Soit ABC un triangle (non aplati). I est le milieu de BC ; les points H et J sont définis par $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

1) Justifier que $(A\,;\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.
2) Déterminer dans ce repère les équations des droites AI et CH.
3) Calculer les coordonnées du point d'intersection G de AI et CH.
4) Démontrer que B, G et J sont alignés.

Réponses

10.20 1) $A(0\,;0)$ $B(1\,;0)$ $C(1\,;1)$ $D(0\,;1)$ 2) $I(\frac{1}{2}\,;0)$ $E(\frac{1}{2}\,;\frac{\sqrt{3}}{2})$

3) $J(1\,;\frac{1}{2})$ $F(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\frac{1}{2})$ 4) oui

10.21 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\,\overrightarrow{PI}$

10.22

1) $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires, puisque le triangle ABC est non aplati.
2) AI : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \end{cases}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ ou $x-y=0$

   CH : $\begin{cases} x=2\,\mu \\ y=1-3\,\mu \end{cases}$ avec $\mu\in\mathbb{R}$ ou $3\,x+2\,y-2=0$
3) $G(\frac{2}{5}\,;\frac{2}{5})$

10.23 On donne les points $\mathrm{A}(1\,;-2\,;4)$ et $\mathrm{B}(-1\,;3\,;2)$. Déterminer l'intersection de la droite AB et du plan d'équation $z = 1$.

10.24 Les droites AB et CD de l'espace sont-elles confondues, strictement parallèles, sécantes ou gauches si, :

1)	$\mathrm{A}(6\,;4\,;-4)$	$\mathrm{B}(4\,;0\,;-2)$	$\mathrm{C}(7\,;0\,;-2)$	$\mathrm{D}(11\,;-4\,;0)$
2)	$\mathrm{A}(-4\,;2\,;1)$	$\mathrm{B}(-1\,;1\,;3)$	$\mathrm{C}(0\,;5\,;-2)$	$\mathrm{D}(9\,;2\,;4)$
3)	$\mathrm{A}(8\,;0\,;3)$	$\mathrm{B}(-2\,;4\,;1)$	$\mathrm{C}(8\,;3\,;-2)$	$\mathrm{D}(0\,;0\,;5)$
4)	$\mathrm{A}(2\,;-3\,;1)$	$\mathrm{B}(3\,;-2\,;3)$	$\mathrm{C}(0\,;-5\,;-3)$	$\mathrm{D}(5\,;0\,;7)$

10.25 Soit f l'homothétie de centre $\mathrm{C}(1\,;0)$ et de rapport -2, et soit g l'homothétie de centre $\mathrm{D}(8\,;7)$ et de rapport 3.

1) Calculer le point $\mathrm{M}'' = g\big(f(\mathrm{M})\big)$, si $\mathrm{M}(1\,;1)$.
2) Déterminer le point F tel que $\mathrm{F} = \mathrm{F}'' = g\big(f(\mathrm{F})\big)$.

Soient trois points alignés A, B, P distincts deux à deux. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ sont colinéaires, il existe un unique nombre réel λ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{BP}}$. On appelle λ le *rapport de section* des points A, B et P pris dans cet ordre et on le note $(\mathrm{AB}\,;\mathrm{P})$. En résumé :

$$(\mathrm{AB}\,;\mathrm{P}) = \lambda \iff \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \lambda\,\overrightarrow{\mathrm{BP}}$$

10.26 On donne les points $\mathrm{A}(3\,;4)$ et $\mathrm{B}(-3\,;-3)$.

1) Calculer les coordonnées du point P tel que $(\mathrm{AB}\,;\mathrm{P}) = \frac{5}{3}$.
2) Calculer les coordonnées du point Q tel que $(\mathrm{AB}\,;\mathrm{Q}) = -\frac{3}{4}$.

10.27 On donne les points $\mathrm{A}(a_1\,;a_2)$ et $\mathrm{B}(b_1\,;b_2)$, ainsi qu'un nombre réel $\lambda \neq 1$. Calculer les coordonnées du point P tel que $(\mathrm{AB}\,;\mathrm{P}) = \lambda$.

Réponses

10.23 $(-2\,;\frac{11}{2}\,;1)$

10.24 1) sécantes 2) strictement parallèles 3) gauches 4) confondues

10.25 1) $\mathrm{M}''(-13\,;-20)$ 2) $\mathrm{F}(-1\,;-2)$

10.26 1) $\mathrm{P}(-12\,;-\frac{27}{2})$ 2) $\mathrm{Q}(\frac{3}{7}\,;1)$

10.27 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a_1-\lambda\,b_1}{1-\lambda}\,;\dfrac{a_2-\lambda\,b_2}{1-\lambda}\right)$