

10.10 Les propositions suivantes sont équivalentes :

- les points A, B et C sont alignés ;
- les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires ;
- le déterminant $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$.

$$1) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} t-1-2 \\ 2t+1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2+t-2 \\ 3-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3-t \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} t-3 & t+1 \\ t & 3-t \end{vmatrix} = (t-3)(3-t) - t(t+1)$$

$$= 3t - t^2 - 9 + 3t - t^2 - t = -2t^2 + 5t - 9$$

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-9) = -47 < 0$$

Puisque cette équation n'admet aucune solution, ce déterminant ne peut jamais s'annuler. En d'autres termes, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont jamais colinéaires et les points A, B et C ne sont jamais alignés.

$$2) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - (-1) \\ -\frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} t - (-1) \\ -3t + 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ -3t-1 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & t+1 \\ -2 & -3t-1 \end{vmatrix} = -3t-1 + 2(t+1) = -t+1$$

On conclut que les points A, B et C sont alignés si $t = 1$.

$$3) \quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - (-1) \\ -\frac{1}{2} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \frac{5}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} t^2 - (-1) \\ 3t - 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 3t - 6 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & t^2 + 1 \\ -2 & 3t - 6 \end{vmatrix} = 3t - 6 + 2(t^2 + 1) = 2t^2 + 3t - 4$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 41 > 0$$

$$t_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{4} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{4}$$

On conclut que les points A, B et C sont alignés si $t = \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{4}$.