

10.13 Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

$$1) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ \frac{3}{2}-1 \\ 14-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{1}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ -3-1 \\ 0-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{3}-1 \\ -\frac{8}{3}-1 \\ t-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ -\frac{11}{3} \\ t-9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 4 & -1 & -\frac{11}{3} \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{11}{3} \\ 5 & -9 & t-9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -\frac{11}{3} \\ \frac{1}{2} & -4 & -\frac{11}{3} \\ 5 & -9 & t-9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & -4 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} \\ &= -16(t-9) + \frac{55}{3} + \frac{33}{2} - \frac{220}{3} - 132 + \frac{1}{2}(t-9) \\ &= -16t + 144 + \frac{55}{3} + \frac{33}{2} - \frac{220}{3} - 132 + \frac{1}{2}t - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

En multipliant cette équation par 6, on obtient :

$$0 = -96t + 864 + 99 + 110 - 440 - 792 + 3t - 27 = -93t - 186 = -93(t+2)$$

Les points A, B, C et D sont donc coplanaires si $t = -2$.

$$2) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -1-4 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-4 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} t+1-1 \\ 3-4 \\ 2t+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -1 \\ 2t+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & t \\ -5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2t+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & t \\ -5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2t+3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 2 - 20t - 0 + 12 + 10(2t+3) = 40 \end{aligned}$$

Comme cette équation n'admet aucune solution, les points A, B, C et D ne sont jamais coplanaires.

$$3) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 8-5 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4+1 \\ m-5 \\ -10+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ m-5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 8-5 \\ m+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ m+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} m+1 & -3 & 3 \\ 3 & m-5 & 3 \\ 6 & -6 & m+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+1 & -3 & 3 \\ 3 & m-5 & 3 \\ 6 & -6 & m+4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} m+1 & -3 \\ 3 & m-5 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} \\ &= m^3 - 21m - 20 - 54 - 54 - 18m + 90 + 18m + 18 + 9m + 36 \\ &= m^3 - 12m + 16 \end{aligned}$$

Pour factoriser le polynôme $P(m) = m^3 - 12m + 16$, il faut deviner l'un de ses zéros. On sait que les zéros entiers possibles sont les diviseurs de 16, à savoir $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$ et ± 16 .

$$P(1) = 1^3 - 12 \cdot 1 + 16 = 5 \neq 0$$

$$P(-1) = (-1)^3 - 12 \cdot (-1) + 16 = 27 \neq 0$$

$$P(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0$$

Utilisons à présent le schéma de Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 0 & -12 & 16 & \\ & 2 & 4 & -16 & \\ \hline 1 & 2 & -8 & 0 & \end{array}$$

$$P(m) = m^3 - 12m + 16 = (m-2) \underbrace{(m^2 + 2m - 8)}_{(m-2)(m+4)} = (m-2)^2 (m+4)$$

Les points A, B, C et D sont ainsi coplanaires si $m = 2$ ou $m = -4$.

$$4) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} t-m+1-t+m \\ m-t+1-m+t \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -m-t+m \\ -t-m+t \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -m \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} m-t+m \\ t-m+t \\ mt-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m-t \\ 2t-m \\ mt-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & -t & 2m-t \\ 1 & -m & 2t-m \\ 1 & -2 & mt-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -t & 2m-t \\ 1 & -m & 2t-m \\ 1 & -2 & mt-2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -t \\ 1 & -m \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -m^2 t + 2m - 4m + 2t - 2t^2 + mt + 2m^2 - mt + 4t - 2m + mt^2 - 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2m^2 - m^2t - 4m + mt^2 + 4t - 2t^2 \\
&= m^2(2-t) - m(2+t)(2-t) + 2t(2-t) \\
&= (2-t)(m^2 - m(2+t) + 2t) \\
&= (2-t)(m-2)(m-t)
\end{aligned}$$

Les points A, B, C et D sont donc coplanaires si $t = 2$ ou $m = 2$ ou $m = t$.