11 Norme

Rappelons que la norme d'un vecteur $\vec{a}$, que l'on note $\|\vec{a}\|$, désigne la longueur d'un représentant du vecteur $\vec{a}$.

La norme vérifie ces propriétés :

1) $\|\vec{a}\| = 0$ si et seulement si $\vec{a} = \vec{0}$
2) $\|\lambda\,\vec{a}\| = |\lambda|\,\|\vec{a}\| \quad \lambda \in \mathbb{R}$
3) $\|\vec{a} + \vec{b}\| \leqslant \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$ inégalité du triangle

Un vecteur $\vec{a}$ est dit **unitaire** s'il est de longueur 1, c'est-à-dire si $\|\vec{a}\| = 1$.

Une base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2})$ du plan est dite **orthonormée** si ses vecteurs sont unitaires et orthogonaux, c'est-à-dire si $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = 1$ et si $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$.

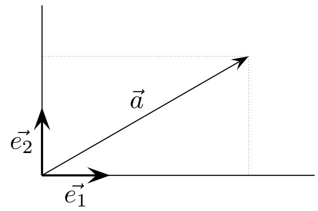
Une base $(\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\,;\vec{e_3})$ de l'espace est dite **orthonormée** si ses vecteurs sont unitaires et deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1$ et si $\vec{e_1} \perp \vec{e_2}$, $\vec{e_1} \perp \vec{e_3}$, $\vec{e_2} \perp \vec{e_3}$.

Un repère est dit **orthonormé** si la base associée est orthonormée.

Dorénavant, les bases et les repères seront orthonormés.

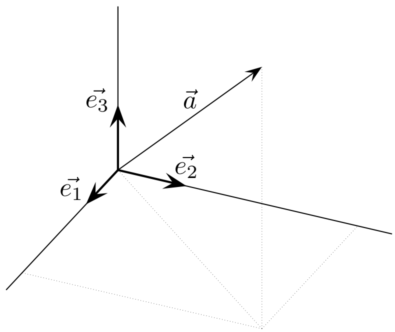
11.1 Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

Montrer : $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$



11.2 Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

Montrer : $\|\vec{a}\| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$



11.3 Vérifier que les vecteurs suivants sont unitaires :

1) $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{6}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

11.4 Calculer le périmètre du triangle ABC :

1) A$(2\,;1)$ B$(5\,;5)$ C$(0\,;-7)$

2) $A(2\,;1\,;3)$ $\qquad$ $B(4\,;3\,;4)$ $\qquad$ $C(2\,;6\,;-9)$

11.5 Montrer que les points $A(5\,;13\,;21)$, $B(25\,;12\,;14)$, $C(10\,;21\,;2)$ et $D(10\,;0\,;5)$ sont les sommets d'un tetraèdre régulier.

11.6 Soient les points $A(6\,;4)$, $B(12\,;-2)$ et $C(17\,;9)$.

1) Montrer que le triangle ABC est isocèle.
2) Calculer son aire de deux manières différentes.

11.7 Former les vecteurs colinéaires au vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et dont la norme vaut :

1) 15 $\qquad$ 2) 1 $\qquad$ 3) 7

11.8 On donne les points $A(4\,;-1)$ et $B(-5\,;11)$. Déterminer les coordonnées du point P situé sur la droite AB à une distance 3 du point A.

11.9 On considère les points $A(4\,;5\,;8)$ et $B(3\,;11\,;5)$.

1) Déterminer le point P de l'axe Ox tel que $\|\overrightarrow{AP}\| = \|\overrightarrow{BP}\|$.
2) Déterminer le point Q de l'axe Oy tel que $\|\overrightarrow{AQ}\| = 2\,\|\overrightarrow{BQ}\|$.

11.10 Soients les points $A(5\,;3)$ et $B(-2\,;k)$. Déterminer k pour que le point $P(2\,;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB.

11.11 Déterminer le centre du cercle passant par les points $P(-3\,;6)$, $Q(9\,;-10)$ et $R(-5\,;4)$. Calculer son rayon.

11.12 Par le point $A(4\,;2)$, on mène un cercle tangent aux axes de coordonnées. Déterminer son centre et son rayon.

Réponses

11.4 1) $18+2\sqrt{17}$ 2) $16+\sqrt{182}$

11.6 1) $\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|=\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|=\sqrt{146}$ 2) 48

11.7 1) $\begin{pmatrix}12\\-9\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-12\\9\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\-\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}\frac{28}{5}\\-\frac{21}{5}\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-\frac{28}{5}\\\frac{21}{5}\end{pmatrix}$

11.8 $\mathrm{P}_1(\frac{11}{5}\,;\frac{7}{5})$ ou $\mathrm{P}_2(\frac{29}{5}\,;-\frac{17}{5})$

11.9 1) $\mathrm{P}(-25\,;0\,;0)$ 2) pas de solution

11.10 $k=-4$ ou $k=2$

11.11 $\mathrm{C}(3\,;-2)$ $r=10$

11.12 $\mathrm{C}_1(2\,;2)$ $r_1=2$ $\mathrm{C}_2(10\,;10)$ $r_2=10$