

11.5 Montrons que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 25 - 5 \\ 12 - 13 \\ 14 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 10 - 5 \\ 21 - 13 \\ 2 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 10 - 5 \\ 0 - 13 \\ 5 - 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -16 \end{pmatrix}$$

Les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires si le déterminant formé des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ est non nul :

$$\begin{vmatrix} 20 & 5 & 5 \\ -1 & 8 & -13 \\ -7 & -19 & -16 \end{vmatrix} = -2560 + 95 + 455 + 280 - 4940 - 80 = -6750 \neq 0$$

Par conséquent, les points A, B, C et D forment un tétraèdre.

Il reste à présent à vérifier que ce tétraèdre est régulier.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 20 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{20^2 + (-1)^2 + (-7)^2} = \sqrt{400 + 1 + 49} = \sqrt{450} = \\ &= \sqrt{15^2 \cdot 2} = 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -19 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5^2 + 8^2 + (-19)^2} = \sqrt{25 + 64 + 361} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$$

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -16 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5^2 + (-13)^2 + (-16)^2} = \sqrt{25 + 169 + 256} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{BC}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 10 - 25 \\ 21 - 12 \\ 2 - 14 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -15 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix} \right\| = \left\| -3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = |-3| \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= 3\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = 3\sqrt{25 + 9 + 16} = 3\sqrt{50} = 3\sqrt{5^2 \cdot 2} = 3 \cdot 5\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{BD}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 10 - 25 \\ 0 - 12 \\ 5 - 14 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -15 \\ -12 \\ -9 \end{pmatrix} \right\| = \left\| -3 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = |-3| \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= 3\sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = 3\sqrt{25 + 16 + 9} = 3\sqrt{50} = 3 \cdot 5\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{CD}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 10 - 10 \\ 0 - 21 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -21 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |3| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= 3\sqrt{0^2 + (-7)^2 + 1^2} = 3\sqrt{0 + 49 + 1} = 3\sqrt{50} = 3 \cdot 5\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

Puisque les six arêtes du tétraèdre ABCD mesurent $15\sqrt{2}$, il est bien régulier.