11.11 Appelons $C(x\,;y)$ le centre du cercle recherché. Puisque le centre du cercle est équidistant des points P, Q et R, on doit avoir $\|\overrightarrow{PC}\| = \|\overrightarrow{QC}\| = \|\overrightarrow{RC}\|$.

$$\|\overrightarrow{PC}\| = \left\|\begin{pmatrix} x+3 \\ y-6 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(x+3)^2+(y-6)^2} = \sqrt{x^2+y^2+6\,x-12\,y+45}$$

$$\|\overrightarrow{QC}\| = \left\|\begin{pmatrix} x-9 \\ y+10 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(x-9)^2+(y+10)^2} = \sqrt{x^2+y^2-18\,x+20\,y+181}$$

$$\|\overrightarrow{RC}\| = \left\|\begin{pmatrix} x+5 \\ y-4 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(x+5)^2+(y-4)^2} = \sqrt{x^2+y^2+10\,x-8\,y+41}$$

L'égalité $\|\overrightarrow{PC}\| = \|\overrightarrow{QC}\|$ implique $\|\overrightarrow{PC}\|^2 = \|\overrightarrow{QC}\|^2$, c'est-à-dire :

$x^2+y^2+6\,x-12\,y+45 = x^2+y^2-18\,x+20\,y+181$

$24\,x-32\,y-136=0$

$\boxed{3\,x-4\,y-17=0}$

L'égalité $\|\overrightarrow{PC}\| = \|\overrightarrow{RC}\|$ implique $\|\overrightarrow{PC}\|^2 = \|\overrightarrow{RC}\|^2$, ce qui donne :

$x^2+y^2+6\,x-12\,y+45 = x^2+y^2+10\,x-8\,y+41$

$-4\,x-4\,y+4=0$

$\boxed{x+y-1=0}$

En résumé, les coordonnées du centre du cercle sont solution du système :

$$\begin{cases} 3\,x-4\,y-17=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

La résolution de ce système mène à $x=3$ et $y=-2$, d'où $C(3\,;-2)$.

Pour déterminer le rayon du cercle, il suffit de calculer $\|\overrightarrow{PC}\|$, $\|\overrightarrow{QC}\|$ ou $\|\overrightarrow{RC}\|$.

$$\|\overrightarrow{PC}\| = \left\|\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10$$