12 Produit scalaire

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et on le note $\vec{a} \cdot \vec{b}$, le nombre

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2$$

Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et on le note $\vec{a} \cdot \vec{b}$, le nombre

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + a_3\, b_3$$

12.1 Soient $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ trois vecteurs du plan ou de l'espace et $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer ces propriétés du produit scalaire :

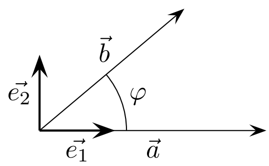
1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3) $(\lambda\, \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\, (\vec{a} \cdot \vec{b})$
4) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

12.2 Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace.

1) Démontrer que $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - 2\,(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$.
2) En déduire que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a} - \vec{b}\|^2\right)$.
3) Conclure que toute rotation des vecteurs de la base laisse le produit scalaire invariant.

12.3 Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace et φ l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

1) Considérons une base orthonormée telle que le premier vecteur de la base $\vec{e_1}$ possède la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{a}$, et que le second vecteur de la base $\vec{e_2}$ fasse partie du plan défini par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Exprimer les composantes des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans cette base.



2) Calculer le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
3) Conclure à la formule $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\, \|\vec{b}\|\, \cos(\varphi)$ quel que soit le choix de la base orthonormée.

12.4 Soient les points A$(2\,;-3)$, B$(3\,;2)$ et C$(-2\,;5)$. Calculer les angles du triangle ABC.

12.5 Calculer les angles que la droite OA forme avec chacun des axes de coordonnées dans le cas où $A(1\,;1\,;2)$.

12.6 On donne $A(1\,;0\,;0)$ et $B(0\,;2\,;0)$. Déterminer un point C de l'axe Oz pour lequel l'angle en C du triangle ABC mesure 60°.

12.7 Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs du plan ou de l'espace. Démontrer que les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul.
En résumé :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

12.8 On donne les points $A(-4\,;-3)$, $B(2\,;0)$ et $C(0\,;4)$. Montrer que les droites AB et BC sont perpendiculaires.

12.9 Montrer que les points $A(-4\,;5\,;3)$, $B(-1\,;1\,;5)$, $C(5\,;5\,;4)$ et $D(2\,;9\,;2)$ forment un rectangle.

12.10 Soient $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre k pour lequel les vecteurs $\vec{a} + k\,\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires.

12.11 On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\,\vec{u} + \vec{w}$.

12.12 Démontrer que les diagonales d'un losange ABCD se coupent à angle droit.
Indication : poser $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$; examiner les vecteurs $\vec{a} + \vec{b}$ et $\vec{a} - \vec{b}$.

12.13 Montrer, de deux façons différentes, que les points $A(5\,;-8)$, $B(3\,;1)$, $C(-4\,;7)$ et $D(-2\,;-2)$ forment un losange.

12.14 On donne les points $A(1\,;4)$, $B(5\,;2)$ et l'ordonnée égale à 5 d'un point C. Déterminer tous les points C du plan tels que le triangle de sommets A, B et C soit un triangle rectangle. Parmi les triangles trouvés, en est-il qui sont isocèles ?

12.15 Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Démontrer que le vecteur $\vec{b}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{b} = \lambda \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

12.16 On donne les points $A(2\,;1)$ et $B(3\,;-5)$.

1) Déterminer les sommets C et D d'un carré ABCD dont AB est un côté.
2) Déterminer les sommets P et Q d'un carré APBQ dont AB est une diagonale.

12.17 Soient $A(1\,;4)$ et $C(6\,;2)$. Calculer les coordonnées des points B et D tels que le quadrilatère ABCD soit un losange dont la diagonale BD ait une longueur double de la diagonale AC. Déterminer également l'aire du losange et la longueur de ses côtés.

12.18 On donne les points $B(4\,;8)$ et $C(9\,;-4)$. Déterminer le point A pour lequel ABC est un triangle isocèle en A d'aire égale à 169.

12.19 On donne deux sommets $B(-3\,;8)$ et $C(-6\,;2)$ d'un trapèze ABCD. Déterminer les coordonnées des deux autres sommets de ce trapèze, sachant que :
– ce trapèze est rectangle en B et en C ;
– le côté AB mesure $3\sqrt{5}$;
– le côté CD mesure le double du côté BC.

12.20 Déterminer l'orthocentre du triangle dont on connaît les sommets $A(6\,;0)$, $B(8\,;2)$ et $C(0\,;2)$.

12.21 On donne les points $A(1\,;2\,;3)$, $B(4\,;8\,;-3)$ et $C(6\,;3\,;2)$, et on considère le triangle ABC.

1) Calculer la longueur de la hauteur issue de C.
2) Déterminer l'aire du triangle ABC.

12.22 Déterminer le centre et le rayon du cercle passant par les points $A(2\,;3)$, $B(-3\,;2)$ et $C(1\,;-2)$.

12.23 On considère les points $A(4\,;4)$ et $B(-2\,;3)$. Trouver le centre et le rayon du cercle qui passe par A et qui est tangent à la droite OB en O.

12.24 Soit le cercle γ de centre $C(4\,;-2)$ et de rayon 5.

1) Dessiner les droites qui passent par le point $A(-3\,;-1)$ et qui sont tangentes au cercle γ.
2) Déterminer algébriquement le point de tangence de chacune de ces droites avec le cercle γ.

Réponses

12.3 1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} \|\vec{a}\| \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} \|\vec{b}\| \cos(\varphi) \\ \|\vec{b}\| \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \cos(\varphi)$

12.4 $\alpha = 37{,}87^\circ$ $\beta = 109{,}65^\circ$ $\gamma = 32{,}48^\circ$

12.5 $65{,}91^\circ$ $65{,}91^\circ$ $35{,}26^\circ$

12.6 $\mathrm{C}_1 \left(0\,;0\,;\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}}\right)$ ou $\mathrm{C}_2 \left(0\,;0\,;-\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}}\right)$

12.10 $k = \frac{4}{7}$

12.11 $w = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ $k = 3$

12.14 $\mathrm{C}_1(\frac{3}{2}\,;5)$ $\mathrm{C}_2(\frac{13}{2}\,;5)$ $\mathrm{C}_3(2\,;5)$ $\mathrm{C}_4(4\,;5)$ ABC_4 est isocèle

12.16 1) $\mathrm{C}_1(9\,;-4)$ $\mathrm{D}_1(8\,;2)$ 2) $\mathrm{P}(-\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{2})$ $\mathrm{Q}(\frac{11}{2}\,;-\frac{3}{2})$
$\mathrm{C}_2(-3\,;-6)$ $\mathrm{D}_2(-4\,;0)$

12.17 $\mathrm{B}(\frac{3}{2}\,;-2)$ $\mathrm{D}(\frac{11}{2}\,;8)$ aire : 29 longueur des côtés : $\frac{\sqrt{145}}{2}$

12.18 $\mathrm{A}_1(\frac{61}{2}\,;12)$ $\mathrm{A}_2(-\frac{35}{2}\,;-8)$

12.19 $\mathrm{A}_1(-9\,;11)$ $\mathrm{D}_1(-18\,;8)$ $\mathrm{A}_2(3\,;5)$ $\mathrm{D}_2(6\,;-4)$

12.20 $\mathrm{H}(6\,;-4)$

12.21 1) $3\sqrt{2}$ 2) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

12.22 centre : $(-\frac{1}{6}\,;\frac{5}{6})$ rayon : $\frac{13\sqrt{2}}{6}$

12.23 centre : $(\frac{12}{5}\,;\frac{8}{5})$ rayon : $\frac{4\sqrt{13}}{5}$

12.24 Les points de tangence sont $\mathrm{T}_1(1\,;2)$ et $\mathrm{T}_2(0\,;-5)$.

12.25 Identité d'Apollonius

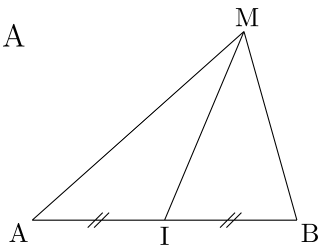
Démontrer que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses côtés.

12.26 Théorème de la médiane

Soient A et B deux points du plan et I le milieu de A et B. Montrer que pour tout point M du plan, on a :

$$\mathrm{MA}^2 + \mathrm{MB}^2 = 2\,\mathrm{MI}^2 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AB}^2$$

Indication : calculer de deux façons l'expression $(\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IA}}) + (\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}}) \cdot (\overrightarrow{\mathrm{MI}} + \overrightarrow{\mathrm{IB}})$.

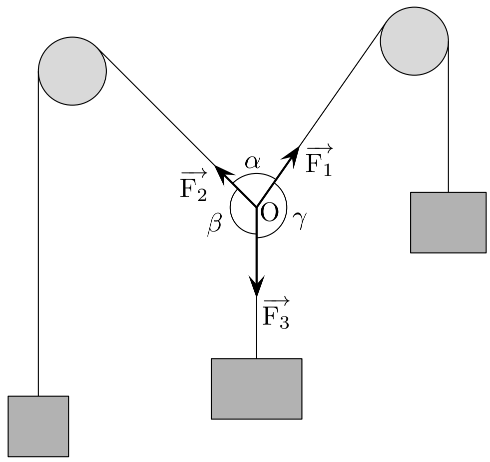


12.27 Relation d'Euler

Soit ABCD un quadrilatère quelconque.

1) Démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{DC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{DA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{DB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CA}} = 0$.
   Indication : utiliser la relation de Chasles $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
2) En déduire que les 3 hauteurs d'un triangle ABC quelconque sont concourantes.

12.28 On réalise à l'aide de trois masses et de deux poulies le montage ci-contre.



Sachant que le système est en équilibre, on souhaite déterminer les angles α, β et γ.

On admet que s'appliquent en O trois forces $\overrightarrow{\mathrm{F}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{F}_2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}_3}$ dont les normes sont proportionnelles aux masses. On prendra :

$\|\overrightarrow{\mathrm{F}_1}\| = 10$ N, $\|\overrightarrow{\mathrm{F}_2}\| = 8$ N, $\|\overrightarrow{\mathrm{F}_3}\| = 12$ N.

On nomme $\vec{\mathrm{R}} = \overrightarrow{\mathrm{F}_1} + \overrightarrow{\mathrm{F}_2} + \overrightarrow{\mathrm{F}_3}$ la résultante des trois forces.

1) Exprimer en fonction des angles α, β et γ les produits scalaires $\overrightarrow{\mathrm{F}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{F}_2}$, $\overrightarrow{\mathrm{F}_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{F}_3}$ et $\overrightarrow{\mathrm{F}_3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{F}_1}$.
2) En déduire en fonction de α, β et γ les produits scalaires $\vec{\mathrm{R}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{F}_1}$, $\vec{\mathrm{R}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{F}_2}$ et $\vec{\mathrm{R}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{F}_3}$.
3) Sachant qu'à l'équilibre $\vec{\mathrm{R}} = \vec{0}$, écrire un système de trois équations que doivent vérifier $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ et $\cos(\gamma)$.
4) En déduire les valeurs des angles α, β et γ.

Réponses

12.28 $\alpha = \cos^{-1}(-\frac{1}{8}) \approx 97{,}18^\circ$ $\beta = \cos^{-1}(-\frac{9}{16}) \approx 124{,}23^\circ$ $\gamma = \cos^{-1}(-\frac{3}{4}) \approx 138{,}59^\circ$