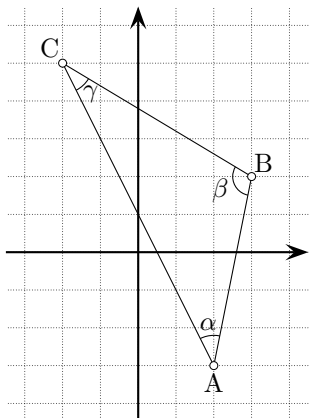


12.4



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2-2 \\ 5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- 1) Calculons l'angle α à l'aide de l'égalité $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\| \cos \alpha$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} = -4 + 40 = 36$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AC}\| &= \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = |4| \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 4 \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \\ &= 4 \sqrt{1 + 4} = 4 \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc : } 36 = \sqrt{26} \cdot 4 \sqrt{5} \cos(\alpha)$$

$$\text{d'où l'on tire : } \cos(\alpha) = \frac{36}{\sqrt{26} \cdot 4 \sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{130}} = \frac{9\sqrt{130}}{130}$$

$$\text{Finalement, } \alpha = \arccos\left(\frac{9\sqrt{130}}{130}\right) \approx 37,87^\circ$$

- 2) Déterminons l'angle β grâce à la relation $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\| \cos(\beta)$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 - 15 = -10$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$\text{Comme on a déjà calculé } \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{26}, \text{ on pose } -10 = \sqrt{26} \sqrt{34} \cos(\beta).$$

$$\text{Par suite } \cos(\beta) = -\frac{10}{\sqrt{26} \sqrt{34}} = -\frac{10}{\sqrt{884}} = -\frac{10}{2 \sqrt{221}} = -\frac{5}{\sqrt{221}} = -\frac{5\sqrt{221}}{221}$$

$$\text{Dès lors, } \beta = \arccos\left(-\frac{5\sqrt{221}}{221}\right) \approx 109,65^\circ$$

- 3) On déduit immédiatement la valeur de l'angle γ en utilisant le fait que $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ : \gamma = 180^\circ - (37,87^\circ + 109,65^\circ) = 32,48^\circ$.

On arrive au même résultat en exploitant l'identité $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \|\overrightarrow{CB}\| \cos(\gamma)$.

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-\overrightarrow{AC}) \cdot (-\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 20 + 24 = 44$$

On sait en outre que $\|\overrightarrow{CA}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 4\sqrt{5}$ et que $\|\overrightarrow{CB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{34}$.

Il en résulte $44 = 4\sqrt{5}\sqrt{34} \cos(\gamma)$ de sorte que

$$\cos(\gamma) = \frac{11}{\sqrt{5}\sqrt{34}} = \frac{11}{\sqrt{170}} = \frac{11\sqrt{170}}{170}$$

$$\text{Enfin, on obtient } \gamma = \arccos\left(\frac{11\sqrt{170}}{170}\right) \approx 32,47^\circ$$