12.5 1) Calculons l'angle φ_1 entre la droite OA et le premier axe de coordonnée, c'est-à-dire entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\vec{e_1}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$$

Par définition d'une base orthonormée, $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1$.

L'égalité $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{e_1} = \|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\|\, \|\vec{e_1}\| \cos(\varphi_1)$ devient $1 = \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \cos(\varphi_1)$.

Il en suit que $\cos(\varphi_1) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

d'où l'on conclut $\varphi_1 = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) \approx 65{,}91^\circ$.

2) L'angle φ_2 entre la droite OA et le deuxième axe de coordonnée et celui que forment les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\vec{e_2}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 1 + 0 = 1$$

En usant de l'identité $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{e_2} = \|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\|\, \vec{e_2}\| \cos(\varphi_2)$, on obtient :

$1 = \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \cos(\varphi_2)$ d'où l'on tire $\cos(\varphi_2) = \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

On trouve finalement $\varphi_2 = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right) \approx 65{,}91^\circ$.

3) Pour déterminer l'angle φ_3 entre la droite OA et le troisième axe de coordonnée, il faut calculer l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ et $\vec{e_3}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 2 = 2$$

À partir de la relation $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{e_3} = \|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\|\, \|\vec{e_3}\| \cos(\varphi_3)$, on pose :

$2 = \sqrt{6} \cdot 1 \cdot \cos(\varphi_3)$ qui implique $\cos(\varphi_3) = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

De là découle que $\varphi_3 = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) \approx 35{,}26^\circ$.