12.6 Puisque le point C se situe sur l'axe Oz, ses coordonnées sont de la forme C$(0\,;0\,;z)$. En outre, l'angle formé par les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ vaut 60°.

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-0 \\ 0-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -z \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-0 \\ 0-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -z \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -z \end{pmatrix} = 0 + 0 + z^2 = z^2$

$\|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-z)^2} = \sqrt{1+z^2}$

$\|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -z \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-z)^2} = \sqrt{4+z^2}$

Rappelons par ailleurs que la valeur exacte de $\cos(60^\circ)$ est $\frac{1}{2}$.

La formule $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\|\,\cos(60^\circ)$ permet de poser l'équation :

$z^2 = \sqrt{1+z^2}\,\sqrt{4+z^2} \cdot \frac{1}{2}$ ou, si l'on préfère, $2\,z^2 = \sqrt{1+z^2}\,\sqrt{4+z^2}$.

En élevant les membres de cette égalité au carré, on obtient :

$4\,z^4 = (1+z^2)\,(4+z^2) = 4 + z^2 + 4\,z^2 + z^4 = z^4 + 5\,z^2 + 4$

On obtient donc l'équation $3\,z^4 - 5\,z^2 - 4 = 0$.

Pour déterminer la valeur de z^2, on résout d'abord l'équation $3\,t^2 - 5\,t - 4 = 0$.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 73 > 0$ d'où l'on tire les deux solutions :

$t_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{73}}{2 \cdot 3} = \dfrac{5 - \sqrt{73}}{6} \qquad t_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{73}}{2 \cdot 3} = \dfrac{5 + \sqrt{73}}{6}$

Vu que $t_1 < 0$ et que l'on doit avoir $z^2 \geqslant 0$, on aboutit à $z^2 = \dfrac{5+\sqrt{73}}{6}$.

On conclut finalement à $z = \sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}}$ ou $z = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}}$, c'est-à-dire

C$(0\,;0\,;\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}})$ ou C$(0\,;0\,;-\sqrt{\frac{5+\sqrt{73}}{6}})$.