

**12.9**

- 1) Montrons que les points A, B, C et D sont coplanaires.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1+4 \\ 1-5 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5+4 \\ 5-5 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 9-5 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 6 \\ -4 & 0 & 4 \\ 8 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 0 - 24 + 72 - 0 - 12 - 36 = 0$$

Par conséquent, les points A, B, C et D forment un quadrilatère.

- 2) Vérifions que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 5-9 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

- 3) Pour conclure que ABCD est un rectangle, il suffit de montrer la présence d'un angle droit.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 18 - 16 - 2 = 0$$