12.14 Vu que l'ordonnée du point C égale 5, le point C est de la forme $\mathrm{C}(x\,;5)$.
Remarquons aussi qu'un triangle rectangle est isocèle si et seulement si ses cathètes sont égaux.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 3 \end{pmatrix}$

1) Supposons que le triangle ABC soit rectangle en A.
$0 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\,(x-1) - 2 = 4\,x - 6$
d'où l'on tire $x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ c'est-à-dire $\mathrm{C}(\frac{3}{2}\,;5)$.
$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = |2| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2^2 + (-1)^2} =$
$= 2\sqrt{4+1} = 2\sqrt{5}$
$\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 1 \\ 5-4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
Le triangle ABC n'est donc pas isocèle, puisque $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| \neq \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|$.

2) Supposons que le triangle ABC soit rectangle en B.
$0 = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-5 \\ 3 \end{pmatrix} = 4\,(x-5) - 6 = 4\,x - 26$
On en déduit $x = \frac{26}{4} = \frac{13}{2}$ et par conséquent $\mathrm{C}(\frac{13}{2}\,;5)$.
$\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{13}{2} - 5 \\ 5-2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = |\tfrac{3}{2}| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{3}{2}\sqrt{1^2 + 2^2} = \frac{3}{2}\sqrt{5}$
Comme $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| \neq \|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|$, le triangle ABC n'est pas isocèle.

3) Supposons que le triangle ABC soit rectangle en C.
$0 = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-5 \\ 3 \end{pmatrix} = (x-1)\,(x-5) + 3 =$
$x^2 - 5\,x - x + 5 + 3 = x^2 - 6\,x + 8 = (x-2)\,(x-4)$
Il y a donc deux possibilités :
(a) $x = 2$ d'où suit $\mathrm{C}(2\,;5)$.
$\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
$\|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2-5 \\ 5-2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |3| \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| =$
$= 3\sqrt{1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$
Étant donné que $\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| \neq \|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\|$, le triangle ABC n'est pas isocèle.

(b) $x = 4$ implique $C(4\,;5)$.

$\|\overrightarrow{AC}\| = \left\|\begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-4 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

$\|\overrightarrow{BC}\| = \left\|\begin{pmatrix} 4-5 \\ 5-2 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{(-1)^2+3^2} = \sqrt{10}$

Au vu de l'égalité $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, le triangle ABC est isocèle.