12.15 1) Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{b} = \lambda \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\lambda \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda\, a_2 \\ \lambda\, a_1 \end{pmatrix} = a_1\,(-\lambda\, a_2) + a_2\,\lambda\, a_1 =$

$= -\lambda\, a_1\, a_2 + \lambda\, a_1\, a_2 = 0$

Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont bien perpendiculaires, puisque $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

2) Supposons le vecteur $\vec{b}$ perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$.

Remarquons que $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} = -a_1\, a_2 + a_1\, a_2 = 0$ de sorte que le vecteur $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$.

Puisque les vecteurs $\vec{b}$ et $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs du plan tous deux perpendiculaires au vecteur $\vec{a}$, ils sont colinéaires.

C'est pourquoi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{b} = \lambda \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.