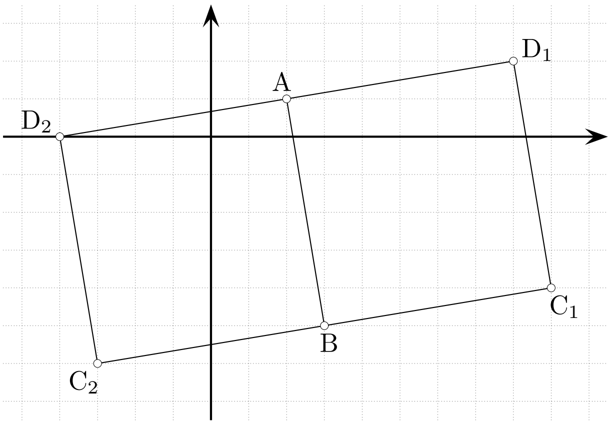
12.16 1)



$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$

Puisque $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BC} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$, ce qui donne :

$\sqrt{37} = \left\| \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \sqrt{6^2 + 1^2} = |\lambda| \sqrt{37}$

Il en résulte $1 = |\lambda|$, c'est-à-dire $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

(a) Si $\lambda = 1$, alors $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 3 \\ c_2 + 5 \end{pmatrix}$.

Aussi $c_1 = 9$ et $c_2 = -4$, en d'autres termes, $C(9\,;-4)$.

Le point D s'obtient grâce à l'identité vectorielle $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$:

$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - 2 \\ d_2 - 1 \end{pmatrix}$ conduit à $d_1 = 8$ et $d_2 = 2$, soit $D(8\,;2)$.

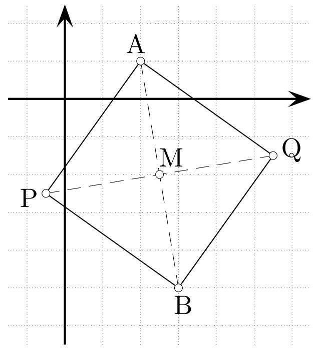
(b) Si $\lambda = -1$, alors $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 3 \\ c_2 + 5 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas, $c_1 = -3$ et $c_2 = -6$, d'où $C(-3\,;-6)$.

De même, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ devient $\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - 2 \\ d_2 - 1 \end{pmatrix}$

d'où l'on tire $d_1 = -4$ et $d_2 = 0$, donc $D(-4\,;0)$.

2)



Désignons par M le milieu des points A et B : $M\left(\frac{2+3}{2}\,;\,\frac{1-5}{2}\right) = M\left(\frac{5}{2}\,;\,-2\right)$.

$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 2 \\ -2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \|\overrightarrow{AM}\| = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{2}\sqrt{37}$

Comme $\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{AM}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MP} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

En outre, $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{MP}\|$, ce qui permet de poser :

$$\frac{1}{2}\sqrt{37} = \left\|\lambda \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\| = |\lambda| \left\|\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\| = |\lambda|\sqrt{3^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = |\lambda|\sqrt{9 + \tfrac{1}{4}}$$
$$= |\lambda|\sqrt{\tfrac{37}{4}} = |\lambda|\,\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{4}} = |\lambda|\,\frac{\sqrt{37}}{2}$$

En résumé $\frac{1}{2}\sqrt{37} = |\lambda|\,\frac{\sqrt{37}}{2}$, d'où l'on déduit $|\lambda| = 1$.

(a) Si $\lambda = 1$, alors $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - \frac{5}{2} \\ p_2 + 2 \end{pmatrix}$.

Il en résulte $p_1 = \frac{11}{2}$ et $p_2 = -\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $P(\frac{11}{2}\,;-\frac{3}{2})$.

Sachant que M est aussi le milieu des points P et Q, on a également :

$M(\frac{5}{2}\,;-2) = \left(\frac{\frac{11}{2}+q_1}{2}\,;\,\frac{-\frac{3}{2}+q_2}{2}\right)$

D'une part $\quad 5 = \frac{11}{2} + q_1 \quad$ d'où l'on tire $\quad q_1 = 5 - \frac{11}{2} = -\frac{1}{2}$,

d'autre part $\quad -4 = -\frac{3}{2} + q_2 \quad$ d'où l'on déduit $\quad q_2 = -4 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$.

En définitive, $Q(-\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{2})$.

(b) Si $\lambda = -1$, alors $\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - \frac{5}{2} \\ p_2 + 2 \end{pmatrix}$.

On en infère $p_1 = -\frac{1}{2}$ et $p_2 = -\frac{5}{2}$, donc $P(-\frac{1}{2}\,;-\frac{5}{2})$.

En faisant également valoir que M est le milieu des points P et Q, il appert que $Q(\frac{11}{2}\,;-\frac{3}{2})$, au vu des résultats de (a).

On constate finalement que les possibilités (a) et (b) déterminent le même carré en intervertissant les points P et Q.