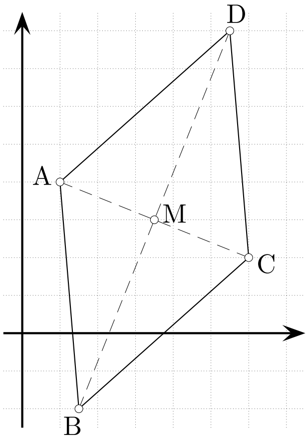
12.17



Appelons M le milieu des points A et C : $\mathrm{M}\left(\frac{1+6}{2}\,;\frac{4+2}{2}\right) = \mathrm{M}\left(\frac{7}{2}\,;3\right)$.

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

Sachant que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MB}}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

En outre $\|\overrightarrow{\mathrm{MB}}\| = \frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\| = \frac{1}{2}\cdot 2\,\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|$. Par conséquent :

$\sqrt{29} = \left\| \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda|\,\sqrt{2^2+5^2} = |\lambda|\,\sqrt{29}$

De la sorte, $|\lambda| = 1$, si bien que $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

1) Si $\lambda = 1$, alors $\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \frac{7}{2} \\ b_2 - 3 \end{pmatrix}$.

   Il en découle $b_1 = \frac{11}{2}$ et $b_2 = 8$, c'est-à-dire $\mathrm{B}(\frac{11}{2}\,;8)$.

   Puisque M est aussi le milieu des points B et D, on a :

   $\mathrm{M}\left(\frac{7}{2}\,;3\right) = \left(\frac{\frac{11}{2}+d_1}{2}\,;\frac{8+d_2}{2}\right)$ qui entraîne $d_1 = \frac{3}{2}$ et $d_2 = -2$, soit $\mathrm{D}(\frac{3}{2}\,;-2)$.

2) Si $\lambda = -1$, alors $\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - \frac{7}{2} \\ b_2 - 3 \end{pmatrix}$.

   Par suite, $b_1 = \frac{3}{2}$ et $b_2 = -2$, donc $\mathrm{B}(\frac{3}{2}\,;-2)$.

   Compte tenu des résultats du cas 1), il apparaît que $\mathrm{D}(\frac{11}{2}\,;8)$, c'est-à-dire que la seconde possibilité revient à échanger les points B et D, définissant ainsi toujours le même losange.

Pour déterminer (au signe près) l'aire du losange, cas particulier d'un parallélogramme, il suffit de calculer le déterminant formé des vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}-1 \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2}-1 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2 + 27 = 29$

Le losange a ainsi une aire égale à 29.

On peut autrement calculer l'aire du losange en utilisant qu'elle vaut la moitié du produit des diagonales :

$\frac{1}{2}\,\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|\,\|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|\cdot 2\,\|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\| = \|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\|^2 = (\sqrt{29})^2 = 29$

Puisque les côtés d'un losange sont isométriques, il suffit de calculer $\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\|$ pour connaître leur mesure :

$\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \left\|\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -6\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 36} = \sqrt{\frac{145}{4}} = \frac{\sqrt{145}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{145}}{2}$