

12.18 Désignons par M le milieu des points B et C : $M\left(\frac{4+9}{2}; \frac{8-4}{2}\right) = M\left(\frac{13}{2}; 2\right)$.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 9-4 \\ -4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

Puisque $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BC}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$.

En exploitant l'information concernant l'aire du triangle, on établit l'équation :

$$169 = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{AM}\| = \frac{1}{2} \cdot 13 \|\overrightarrow{AM}\| \quad \text{d'où l'on tire} \quad \|\overrightarrow{AM}\| = 26.$$

$$\text{Ainsi } 26 = \|\overrightarrow{AM}\| = |\lambda| \left\| \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = |\lambda| \sqrt{12^2 + 5^2} = |\lambda| \sqrt{169} = 13 |\lambda|$$

si bien que $|\lambda| = 2$, c'est-à-dire $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$.

$$1) \text{ Si } \lambda = 2, \text{ alors } \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 24 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{13}{2} \\ a_2 - 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $a_1 = \frac{61}{2}$ et $a_2 = 12$, soit $A\left(\frac{61}{2}; 12\right)$.

$$2) \text{ Si } \lambda = -2, \text{ alors } \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -24 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \frac{13}{2} \\ a_2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte $a_1 = -\frac{35}{2}$ et $a_2 = -8$, c'est-à-dire $A\left(-\frac{35}{2}; -8\right)$.