

12.21 Soit $P(x; y; z)$ le pied de la hauteur issue du point C.

Le point P se situe sur la droite AB, ce qui signifie que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AP} sont colinéaires. Il existe par conséquent un nombre λ tel que $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$. En écrivant les composantes respectives de ces vecteurs, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{d'où nous tirons} \quad \begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 6\lambda + 2 \\ z = -6\lambda + 3 \end{cases}$$

Par ailleurs, nous savons que $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{AB}$:

$$\begin{aligned} 0 = \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} 3\lambda + 1 - 6 \\ 6\lambda + 2 - 3 \\ -6\lambda + 3 - 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\lambda - 5 \\ 6\lambda - 1 \\ -6\lambda + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \\ &= 3(3\lambda - 5) + 6(6\lambda - 1) - 6(-6\lambda + 1) = 81\lambda - 27 \end{aligned}$$

Il en résulte $\lambda = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$, d'où découlent aussitôt les coordonnées du point P :

$$\begin{cases} x = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 2 \\ y = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 4 \\ z = -6 \cdot \frac{1}{3} + 3 = 1 \end{cases} \quad \text{en d'autres termes} \quad P(2; 4; 1)$$

Nous pouvons maintenant calculer la longueur de la hauteur issue de C :

$$\|\overrightarrow{CP}\| = \left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Pour déterminer l'aire du triangle ABC, nous avons encore besoin de la longueur de la base AB :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = \left\| 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = |3| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \\ &= 3\sqrt{9} = 3 \cdot 3 = 9 \end{aligned}$$

Finalement, l'aire du triangle ABC vaut : $\frac{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{CP}\|}{2} = \frac{9 \cdot 3\sqrt{2}}{2} = \frac{27\sqrt{2}}{2}$