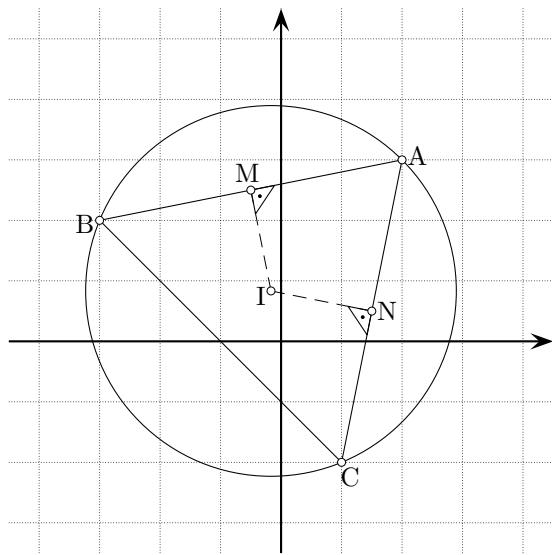


12.22



Posons $I(x; y)$ le centre du cercle recherché.

- 1) Le point I se situe sur la médiatrice du segment AB :

$$\text{Le milieu des points } A \text{ et } B \text{ est : } M\left(\frac{2-3}{2}; \frac{3+1}{2}\right) = M\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Puisque $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{MI}$, leur produit scalaire est nul :

$$0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MI} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2} \\ y - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = -5(x + \frac{1}{2}) - 1(y - \frac{5}{2}) = -5x - y$$

Les coordonnées du point I satisfont donc l'équation $5x + y = 0$

- 2) De même, le point I appartient à la médiatrice du segment AC :

$$\text{Désignons par } N \text{ le milieu des points } A \text{ et } C : N\left(\frac{2+3}{2}; \frac{3-2}{2}\right) = N\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

On exploite également la perpendicularité des vecteurs \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{NI} :

$$0 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{NI} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - \frac{3}{2} \\ y - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -1(x - \frac{3}{2}) - 5(y - \frac{1}{2}) = -x - 5y + 4$$

Les coordonnées du point I sont ainsi régies par l'équation $x + 5y - 4 = 0$

En résumé, les coordonnées du point I s'obtiennent en résolvant le système :

$$\begin{cases} 5x + y = 0 \\ x + 5y - 4 = 0 \end{cases}$$

La première équation donne $y = -5x$ que l'on substitue dans la seconde :

$$x + 5(-5x) - 4 = 0, \text{ c'est-à-dire } -24x - 4 = 0, \text{ d'où l'on tire } x = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{Par conséquent } y = -5\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}, \text{ d'où finalement } I\left(-\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right).$$

Calculons enfin le rayon de ce cercle :

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AI}\| &= \left\| \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{6} \\ 3 - \frac{5}{6} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{13}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left| \frac{13}{6} \right| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{13}{6} \sqrt{1^2 + 1^2} = \\ &= \frac{13}{6} \sqrt{2} = \frac{13\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$