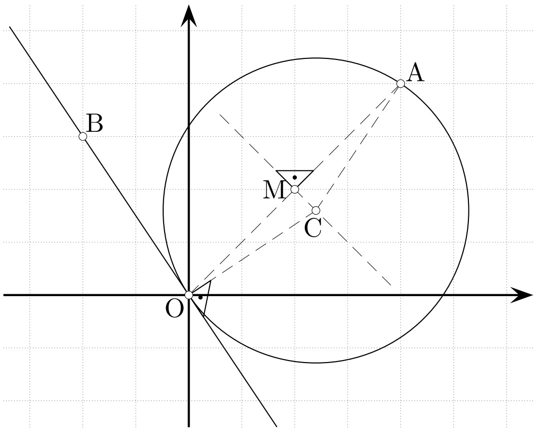
12.23



Désignons par $C(x\,;y)$ le centre du cercle recherché.

1) Vu que le cercle passe par les points O et A, le point C se situe sur leur médiatrice :

   Le milieu des points O et A est donné par $M\left(\frac{0+4}{2}\,;\frac{0+4}{2}\right) = M(2\,;2)$.

   $0 = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \end{pmatrix} = 4\,(x-2) + 4\,(y-2) = 4\,x + 4\,y - 16$

   C'est pourquoi les coordonnées du point C vérifient l'équation $\boxed{x + y - 4 = 0}$

2) Étant donné que le cercle est tangent à la droite OB en O, les vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ sont perpendiculaires :

   $0 = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\,x + 3\,y$

   Les coordonnées du point C satisfont donc l'équation $\boxed{-2\,x + 3\,y = 0}$

On détermine dès lors le point C en résolvant le système $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ -2\,x + 3\,y = 0 \end{cases}$

La première équation fournit $y = -x + 4$ que l'on remplace dans la seconde :
$-2\,x + 3\,(-x+4) = -5\,x + 12 = 0$ d'où l'on conclut $x = \frac{12}{5}$.
Par suite $y = -\frac{12}{5} + 4 = \frac{8}{5}$, si bien que le centre du cercle est $C\left(\frac{12}{5}\,;\frac{8}{5}\right)$.

Il reste encore à calculer le rayon de ce cercle :

$\|\overrightarrow{OC}\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = |\frac{4}{5}| \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{4}{5}\sqrt{3^2 + 2^2} = \frac{4}{5}\sqrt{13} = \frac{4\sqrt{13}}{5}$